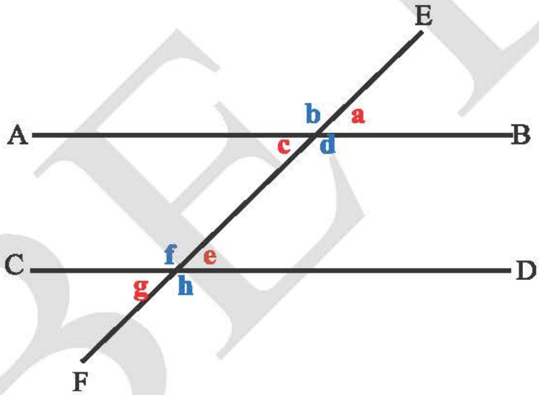
အခန်း ၁ အနားပြိုင်စတုဂံများနှင့်ကြာပီဇီယမ်

မျဉ်းပြိုင်များနှင့်မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်းကို ဖြတ်မျဉ်းတစ်ကြောင်းကဖြတ်၍ ဖြစ်ပေါ်လာသော ထောင့်များအကြောင်းကို သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ယခုသင်ခန်းစာတွင် မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်းကြား အကွာအဝေးတိုင်းတာခြင်းနှင့် အနားပြိုင်စတုဂံများ၏ ဂုဏ်သတ္တိများကို လေ့လာမည့်အပြင် စတုရန်း၊ ရွမ်းဗတ်နှင့် ကြာပီဇီယမ်များဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်းကို ဆက်လက်လေ့လာမည်။

၁.၁ ပြန်လည်လေ့လာရမည့်အကြောင်းအရာများ

မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်းကို ဖြတ်မျဉ်းတစ်ကြောင်းကဖြတ်၍ဖြစ်ပေါ်လာသော ဝိသမသတ်ထောင့်များ၊ လိုက်ဖက်ထောင့်များ၊ ဖြတ်မျဉ်း၏တစ်ဖက်တည်းတွင်ရှိသည့် အတွင်းထောင့်များဆိုင်ရာ မျဉ်းပြိုင်များ၏ ဂုဏ်သတ္တိများကို အကျဉ်းချုပ်ပြန်လည်ဖော်ပြမည်။

မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်း AB နှင့် CD ကို ဖြတ်မျဉ်း EF ကပိုင်းဖြတ်လျှင်



၁။ ဝိသမသတ်ထောင့်များ တူညီကြသည်။

$c = e, \quad d = f.$

၂။ လိုက်ဖက်ထောင့်များ တူညီကြသည်။

$a = e, \quad b = f,$

$c = g, \quad d = h.$

၃။ ဖြတ်မျဉ်း၏တစ်ဖက်တည်းတွင်ရှိသည့်အတွင်းထောင့်နှစ်ခုပေါင်းခြင်းသည် 180° ဖြစ်သည်။

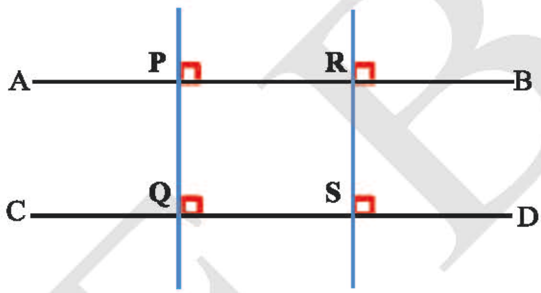
$c + f = 180^\circ,$

$d + e = 180^\circ.$

၁.၂ မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်းကြားအကွာအဝေး

မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်းကြားအကွာအဝေးကို လက်တွေ့တိုင်းထွာကြည့်ကြမည်။

မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်း AB နှင့် CD တို့ကိုဆွဲပါ။ AB ပေါ်တွင်အမှတ် P ကိုယူ၍ P ၌ AB ကို ထောင့်မှန်ကျသောမျဉ်းတစ်ကြောင်းဆွဲပါ။ ၎င်းမျဉ်းနှင့် CD တို့ဆုံသောအမှတ်ကို Q ဟုမှတ်ပါ။ PQ သည် AB နှင့် CD တို့ကို ထောင့်မှန်ကျသည်။ တစ်ဖန် AB ပေါ်တွင် အခြား အမှတ်တစ်ခု R ၌ AB ကို ထောင့်မှန်ကျသောမျဉ်းတစ်ကြောင်းဆွဲရာ CD ကိုအမှတ် S ၌ တွေ့ဆုံပါစေ။ ထိုအခါ မျဉ်းဖြောင့် RS သည် AB နှင့် CD နှစ်ကြောင်းစလုံးကို ထောင့်မှန်ကျသည်။ ပုံ ၁.၁ တွင် PQ နှင့် RS အလျားများကို လက်တွေ့တိုင်းကြည့်ပါက PQ = RS ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရမည်။



ပုံ ၁.၁

မျဉ်းဖြောင့် AB ပေါ်၌ ကြိုက်ရာအမှတ်များယူ၍ ထောင့်မတ်မျဉ်းများဆွဲသားပြီး အထက်ပါ စမ်းသပ်ချက်ကဲ့သို့အကြိမ်ကြိမ်ပြုလုပ်ပါက မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်းကြားရှိ ထောင့်မတ်မျဉ်းပိုင်းများ၏အလျားများ တူညီကြောင်းတွေ့ရပေမည်။ PQ ကို မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်း AB နှင့် CD ကြား အကွာအဝေးဟုခေါ်သည်။

- မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်းကြားရှိ ထောင့်မတ်မျဉ်းပိုင်းတစ်ခု၏အလျားကို မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်း၏ကြားအကွာအဝေးဟုခေါ်သည်။
- မျဉ်းပြိုင်နှစ်ကြောင်း၏ကြားအကွာအဝေးများ တူညီကြသည်။

၁.၃ အနားပြိုင်စတုဂံများ

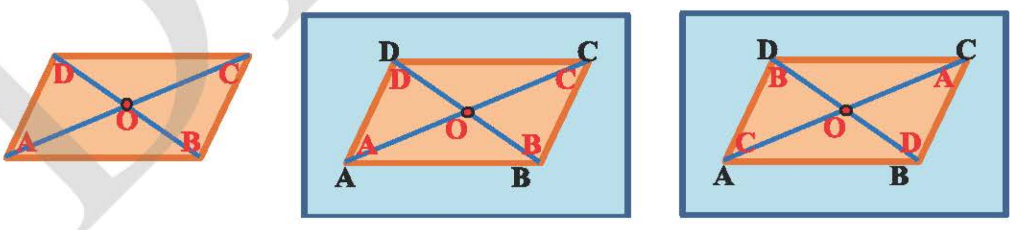
ပုံ ၁.၂

မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများပြိုင်ကြသောစတုဂံတစ်ခုကို **အနားပြိုင်စတုဂံ** ဟုခေါ်သည်။ (ပုံ ၁.၂ ကိုကြည့်ပါ။) အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD တွင် မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများဖြစ်သော AB နှင့် DC ၊ AD နှင့် BC တို့အချင်းချင်းပြိုင်ကြကြောင်းကို သင်္ကေတအားဖြင့် AB // DC, AD // BC ဟု ရေးသားမည်။ အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခုတွင် ပြိုင်နေသည့်အနားတစ်စုံ၏ကြား ထောင့်မတ်ကျမျဉ်းပိုင်းကို ထိုအနားပြိုင်စတုဂံ၏ **အမြင့်မျဉ်း** (altitude) ဟုခေါ်သည်။ ပုံတွင် KD, AN, LC နှင့် BM တို့သည် အမြင့်မျဉ်းများဖြစ်ကြပြီး ထိုအမြင့်မျဉ်းများ၏ အလျားများတူညီကြသည်။

၁.၃.၁ အနားပြိုင်စတုဂံ၏ဂုဏ်သတ္တိအချို့

အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခုတွင် မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများ၏အလျားများ တူညီကြပြီး မျက်နှာချင်းဆိုင်ထောင့်များလည်းတူညီကြကြောင်းကို စမ်းသပ်ချက်ပြုလုပ် ကြည့်ကြပါစို့။

ကတ်ပြားတစ်ခုပေါ်တွင် အနားပြိုင်စတုဂံ **ABCD** ကိုဆွဲပါ။ ထိုအနားပြိုင်စတုဂံကို ကတ်ပြားမှ ဖြတ်ယူပါ။ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း **AC** နှင့် **BD** တို့ကိုဆွဲပြီး ၎င်းတို့ တွေ့ဆုံရာအမှတ်ကို O ဟု မှတ်ပါ။ (ပုံ ၁.၃ (i) ကိုကြည့်ပါ။) ဖြတ်ထားသည့်အနားပြိုင်စတုဂံကို စားပွဲပေါ်ရှိ ကတ်ပြားတစ်ခု၏ မျက်နှာပြင်ပေါ်တွင် ကပ်နေအောင် အမှတ် **O** ၌ ပင်အပ်တစ်ခုဖြင့် စိုက်ပါ။



(i) (ii) (iii)

ပုံ ၁.၃

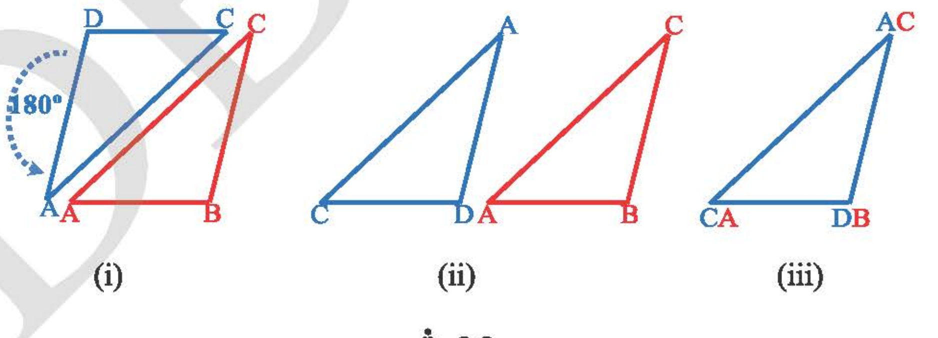
အောက်ခံကတ်ပြား၏မျက်နှာပြင်ပေါ် တွင် အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ၏အနားများတစ်လျှောက် ခဲတံဖြင့် ဆွဲပါ။ (ပုံ ၁.၃ (ii) ကိုကြည့်ပါ။) အပေါ် ဘက်ရှိ အနားပြိုင်စတုဂံကတ်ပြားကို အမှတ် **O** တွင် ပတ်၍ **180°** လှည့်လိုက်ပါ။ ထိုအခါ လှည့်လိုက်သောအနားပြိုင်စတုဂံသည် အောက်ဘက်ရှိ ကတ်ပြားတွင် ဆွဲထားသောအနားပြိုင်စတုဂံနှင့် ထပ်တူညီနေမည်။ (ပုံ ၁.၃ (iii) ကိုကြည့်ပါ။) ထိုအခါ ဖြတ်ထားသောကတ်ပြားပေါ်ရှိ A နှင့် B တို့သည် အောက်ဘက်ကတ်ပြားရှိ C နှင့် D တို့ဖြင့် အသီးသီး တစ်ထပ်တည်းကျရောက်နေသည်ကိုတွေ့ရမည်။ ထို့အတူ AB သည် **CD** နှင့် လည်းကောင်း၊ BC သည် **DA** နှင့် လည်းကောင်း နေရာချင်းဖလှယ်သွားသည်ကို တွေ့ကြရမည်။ ထို့ကြောင့် အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD တွင် အောက်ပါရလဒ်များကို တွေ့ရှိရသည်။

1. **AB = CD , BC = DA**
2. **$\angle$A = $\angle$C , $\angle$B = $\angle$D**

> အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခုတွင် မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများ၏ အလျားများ တူညီကြပြီး မျက်နှာချင်းဆိုင်ထောင့်များလည်း တူညီကြသည်။

၁.၃.၂ အနားပြိုင်စတုဂံကိုထက်ဝက်ပိုင်းဖြတ်ခြင်း

အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခု၏ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းသည် ထိုအနားပြိုင်စတုဂံကို ထပ်တူညီတြိဂံနှစ်ခု အဖြစ်ပိုင်းဖြတ်ကြောင်း လက်တွေ့စမ်းသပ်ဖော်ထုတ်မည်။ အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ကိုကတ်ပြား တစ်ခုပေါ် တွင်ဆွဲ၍ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC ကိုဆွဲပါ။ ထိုအနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ကို ကတ်ပြားမှ ဖြတ်ထုတ်ပါ။ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC တစ်လျှောက် နှစ်ပိုင်းဖြတ်လျှင် ΔABC နှင့် ΔCDA တြိဂံနှစ်ခု ကို ရရှိမည်။ (ပုံ ၁.၄ (i) ကိုကြည့်ပါ။)



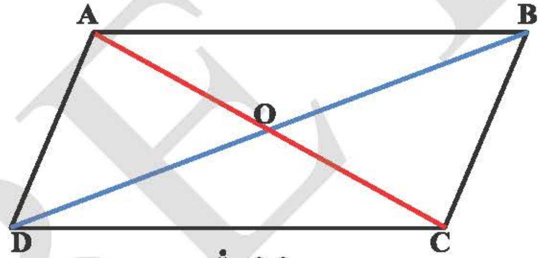
ပုံ ၁.၄

ပုံ ၁.၄ (ii) အတိုင်းဖြစ်အောင် **ΔCDA** ကို **180°** လှည့်ပါ။ **ΔABC** ၏ ထောင့်စွန်း **A** နှင့်အနား **AC** တို့ပေါ်သို့ **ΔCDA** ၏ထောင့်စွန်း **C** နှင့်အနား **CA** တို့ကိုထပ်အောင်ပြုလုပ်ပါ။ ထိုအခါ **ΔCDA** ၏ထောင့်စွန်း **D** သည် **ΔABC** ၏ထောင့်စွန်း **B** ပေါ်တွင် တစ်ထပ်တည်း ကျရောက်နေမည်။ (ပုံ ၁.၄ (iii) ကိုကြည့်ပါ။)
သို့ဖြစ်၍ **ΔCDA** သည် **ΔABC** ပေါ်တွင် တစ်ထပ်တည်းကျရောက်ကြောင်း တွေ့ရှိရသည်။
ထို့ကြောင့် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း **AC** သည် အနားပြိုင်စတုဂံ **ABCD** ကိုထက်ဝက်ပိုင်းဖြတ်သည်။

> အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခု၏ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းတစ်ခုသည် ထိုအနားပြိုင်စတုဂံကို ထက်ဝက်ပိုင်းပြီး ထပ်တူညီတြိဂံနှစ်ခုကိုဖြစ်ပေါ်စေသည်။

၁.၃.၃ အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခု၏ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းများ

အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခု၏ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းများအချင်းချင်း ထက်ဝက်ပိုင်းကြောင်းလေ့လာကြမည်။ အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ကို ဆွဲပြီး ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC နှင့် BD တို့ကိုဆွဲရာ အမှတ် O ၌ ဖြတ်ကြပါစေ။



ပုံ ၁.၅

ပုံ ၁.၅ တွင် ΔAOD နှင့် ΔCOB တို့ကို 180° လှည့်၍ထပ်ပါက ထပ်တူညီသည်။

ထို့ကြောင့် **AO = OC** ---------------------- (1)

တစ်ဖန် B နှင့် D တို့သည် အမှတ် O ၌ ခေါက်ချိုးညီသဖြင့်

BO = OD ---------------------- (2)

ညီမျှခြင်း (1) နှင့် (2) အရ အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ၏ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC နှင့် BDတို့သည် တစ်ခုကိုတစ်ခု ထက်ဝက်ပိုင်းဖြတ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။ ထို့ကြောင့် အနားပြိုင်စတုဂံ၏ဂုဏ်သတ္တိ တစ်ခုကို အောက်ပါအတိုင်းဖော်ပြနိုင်သည်။

> အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခု၏ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းများသည် အချင်းချင်း ထက်ဝက်ပိုင်းဖြတ်ကြသည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၁.၁

၁။ အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD တွင် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC နှင့် BD တို့သည် တစ်ခုကိုတစ်ခု အမှတ် O ၌ ပိုင်းဖြတ်ထားသည်။

(က) ΔOAB နှင့် ΔOCD တို့သည်ထပ်တူညီပါသလား။

(ခ) ΔOBC နှင့် ΔODA တို့သည်ထပ်တူညီပါသလား။

လက်တွေ့ပြုလုပ်၍ ဖြေဆိုပါ။

၂။ ထောင့်မှန်စတုဂံ ABCD တွင် AC သည်ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းဖြစ်သည်။ ABCD သည်အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခုဖြစ်ပါသလား။

(က) ΔDAC နှင့် ΔBCA တို့သည်ထပ်တူညီပါသလား။

(ခ) AC = BD ဖြစ်ပါသလား။

လက်တွေ့ပြုလုပ်၍ ဖြေဆိုပါ။

၃။ စတုရန်း PQRS ကိုဆွဲပါ။

(က) PQRS သည်အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခုဖြစ်ပါသလား။

(ခ) ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း PR နှင့် QS တို့ အလျားချင်းတူညီပါသလား။

(ဂ) ΔPQS နှင့် ΔQRS တို့သည်ထပ်တူညီပါသလား။

ထောင့်မှန်စတုဂံသည် အတွင်းထောင့်အသီးသီး 90° စီရှိသော အနားပြိုင်စတုဂံ ဖြစ်သည်။

၁.၄ အနားပြိုင်စတုဂံများဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်း

အထက်ပါသင်ခန်းစာများမှ သိရှိနားလည်ခဲ့ပြီးသောဂုဏ်သတ္တိများကိုအသုံးပြုလျက် အနားပြိုင်စတုဂံနှင့် ထောင့်မှန်စတုဂံတို့ကို ဆောက်လုပ်ဆွဲသားမည်။ ထိုစတုဂံများဆောက်လုပ်ဆွဲသားရန် လိုအပ်သော အချက်အလက်များကို ပေးထားရမည်။

၁.၄.၁ နီးစပ်အနားနှစ်ခုနှင့်ကြားထောင့်ပေးထားသောအနားပြိုင်စတုဂံဆောက်လုပ်ဆွဲသားနည်း

အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD တွင် AB = 5 cm , AD = 3 cm နှင့် $\angle A = 55°$ ရှိသော အနားပြိုင်စတုဂံကို အောက်ပါအဆင့်များအလိုက် ဆောက်လုပ်ဆွဲသားမည်။

အဆင့် (၁) မျဉ်းပိုင်း AB = 5 cm ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) အမှတ် A ၌ $\angle BAP = 55°$ ကိုဆွဲပါ။

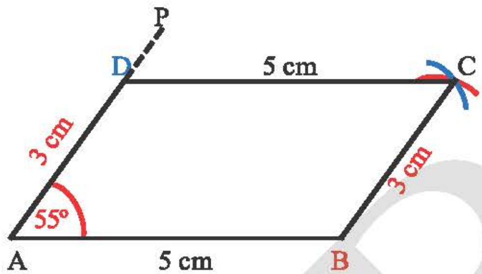
အဆင့် (၃) AP ပေါ်၌ မျဉ်းပိုင်း AD = 3 cm ဖြစ်အောင်ပိုင်းဖြတ်ပါ။

အဆင့် (၄) B ကိုဗဟိုပြု၍အချင်းဝက် 3 cm ရှိသောအဝန်းပိုင်းကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၅) D ကိုဗဟိုပြု၍အချင်းဝက် 5 cm ရှိသောအဝန်းပိုင်းကိုဆွဲရာ အဆင့်(၄)တွင် ဆွဲထားသောအဝန်းပိုင်းကို C တွင်ဖြတ်ပါစေ၊

အဆင့် (၆) B နှင့် C ၊ D နှင့် C တို့ကိုဆက်ပါ။

ဤသို့ဖြင့် လိုအပ်သော အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ကို ရရှိမည်။ (ပုံ ၁.၆ ကို ကြည့်ပါ။)



ပုံ ၁.၆

၁.၄.၂ နီးစပ်အနားနှစ်ခုနှင့်ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းတစ်ခုပေးထားသောအနားပြိုင်စတုဂံဆောက်လုပ်ဆွဲသားနည်း

AB = 6 cm , AD = 3.5 cm နှင့် BD = 5 cm ဟုပေးထားသောအနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ကိုဆောက်လုပ်ဆွဲသားမည်၊

ထို့ကြောင့် လိုအပ်သော အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD တွင် CD = AB = 6 cm နှင့် BC = AD = 3.5 cm ထား၍ဆွဲသားရမည်။

အဆင့် (၁) မျဉ်းပိုင်း AB = 6 cm ကိုဆွဲပါ၊

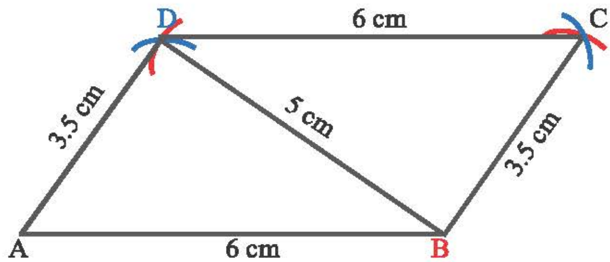
အဆင့် (၂) အမှတ် A ကိုဗဟိုပြု၍အချင်းဝက် 3.5 cm ဖြင့်အဝန်းပိုင်းကိုဆွဲပါ၊

အဆင့် (၃) တစ်ဖန် B ကိုဗဟိုပြု၍အချင်းဝက် 5 cm ဖြင့်အဝန်းပိုင်းကိုဆွဲရာ ပထမအဝန်းပိုင်းကို D ၌ ဖြတ်ပါစေ။ ထိုအခါ Δ ABD ကိုရရှိမည်၊

အဆင့် (၄) B နှင့် D ကိုဗဟိုပြု၍အချင်းဝက် 3.5 cm နှင့် 6 cm အဝန်းပိုင်းများ အသီးသီးဆွဲရာ C ၌ ဖြတ်ပါစေ၊

အဆင့် (၅) B နှင့် C , D နှင့် C တို့ကိုဆက်ပါ၊ ထိုအခါ Δ CBD ကိုရရှိမည်။

ဤသို့ဖြင့် လိုအပ်သောအနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ကို ရရှိမည်။ (ပုံ ၁.၇ ကိုကြည့်ပါ။)



ပုံ ၁.၇

လေ့ကျင့်ခန်း ၁.၂

အောက်ပါပေးထားချက်များအရ အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD တို့ကို ဆောက်လုပ်ပါ။

၁။ $AB = 4.5$ cm , $AD = 3.3$ cm , $\angle A = 59^\circ$,

၂။ $AB = 3.7$ cm , $BC = 3.1$ cm , $\angle B = 105^\circ$

၃။ $AB = 6.1$ cm , $AD = 3.5$ cm , $BD = 5.2$ cm

၄။ $AB = 4.3$ cm , $BC = 2.9$ cm , $AC = 5.5$ cm

၁.၅ စတုရန်းများဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်း

အထက်ပါသင်ခန်းစာများမှ သိရှိနားလည်ခဲ့ပြီးသောဂုဏ်သတ္တိများကို အသုံးပြုလျက် စတုရန်း (square) များကိုဆောက်လုပ်ဆွဲသားမည်။ ထိုသို့ ဆောက်လုပ်ဆွဲသားနိုင်ရန် လိုအပ်သော အချက်အလက်များကို ပေးထားရမည်။

၁.၅.၁ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းတစ်ခုပေးထားသောစတုရန်းပုံဆောက်လုပ်ဆွဲသားနည်း

ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း၏အလျား 7 cm ရှိသောစတုရန်းကိုဆောက်လုပ်ရန် အောက်ပါအဆင့် (၅) ဆင့်ဖြင့် ဆွဲသားမည်။

အဆင့် (၁) မျဉ်းပိုင်း $AC = 7$ cm ကိုဆွဲပါ။

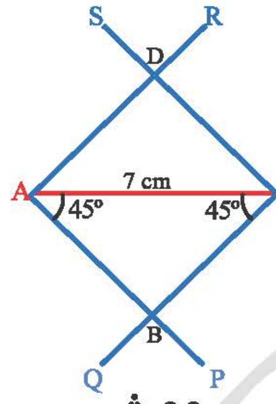
အဆင့် (၂) A တွင် $\angle PAC = 45^\circ$ ဖြစ်အောင် AP မျဉ်းကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၃) C တွင် $\angle QCA = 45^\circ$ ဖြစ်အောင် CQ မျဉ်းကိုဆွဲပါ။

AP နှင့် CQ တို့၏ဖြတ်မှတ်ကို B ဟုမှတ်ပါ။

အဆင့် (၄) A မှ AR ကို BC နှင့် ပြိုင်အောင်ဆွဲပါ။

အဆင့် (၅) C မှ CS ကို BA နှင့် ပြိုင်အောင်ဆွဲရာ AR ကို D ၌ ဖြတ်ပါစေ။
ပုံ ၁.၈ မှ ABCD သည် လိုအပ်သောစတုရန်းဖြစ်သည်။



ပုံ ၁.၈

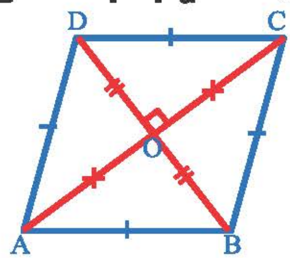
လေ့ကျင့်ခန်း ၁.၃

၁။ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း၏ အလျားများ
(က) 5 cm နှင့် (ခ) 8 cm ရှိသည့်စတုရန်းများကို ဆောက်လုပ်ဆွဲသားပါ။
စတုရန်းအသီးသီး၏အနားများအလျားကို တိုင်းပါ။

၂။ အောက်ပါ စတုရန်းတို့ကို ဆောက်လုပ်ဆွဲသားပါ။
(က) အနားတစ်ဖက်လျှင် 5 cm ရှိသော စတုရန်း။
(ခ) အနားတစ်ဖက်လျှင် 6 cm ရှိသော စတုရန်း။
(ဂ) ပတ်လည်အနား 16 cm ရှိသော စတုရန်း။

၁.၆ ရွမ်းဗတ်များဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်း

အနားအားလုံးအလျားတူညီသောစတုဂံကို ရွမ်းဗတ် (rhombus) ဟုခေါ်သည်။



ပုံ ၁.၉

ရွှမ်းဗတ် ABCD တွင် AB = BC = CD = DA ဖြစ်သည်။

ပုံ ၁.၉ ကဲ့သို့သော ရွှမ်းဗတ်ပုံကိုကတ်ပြားပေါ်တွင်ဆွဲ၍ ပိုင်းဖြတ်ထပ်ကြည့်ခြင်းဖြင့် ΔAOB ၊ ΔBOC ၊ ΔDOC နှင့် ΔAOD တို့သည် ထပ်တူညီထောင့်မှန်တြိဂံများဖြစ်ကြကြောင်း သိရှိနိုင်သည်။ ထို့ကြောင့် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC နှင့် BD တို့သည် တစ်ခုကိုတစ်ခု ထောင့်မတ်ကျ ထက်ဝက်ပိုင်းကြသည်။

၁.၆.၁ အနားတစ်ခုနှင့်ထောင့်တစ်ခုပေးထားသောရွှမ်းဗတ်ဆောက်လုပ်ဆွဲသားနည်း

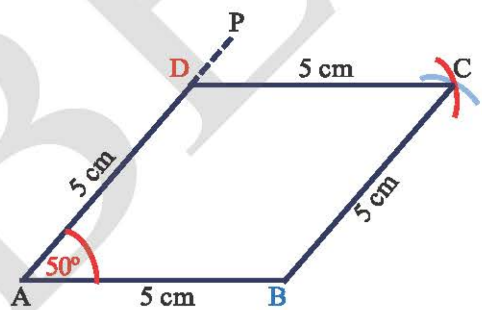
အနားတစ်ဖက် 5 cm နှင့် ထောင့်တစ်ခု 50° ဟုပေးထားသော ရွှမ်းဗတ်ပုံတစ်ခု ရရှိရန် အောက်ပါ အဆင့်များအတိုင်း ဆောက်လုပ်နိုင်မည်။

အဆင့် (၁) မျဉ်းပိုင်း AB = 5 cm ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) A တွင် $\angle BAP = 50^\circ$ ကိုဆွဲပါ။ AP ပေါ်တွင် AD = 5 cm ဖြစ်အောင်ပိုင်းဖြတ်ပါ။

အဆင့် (၃) **D** ကိုဗဟိုပြု၍အချင်းဝက် 5 cm ရှိသောအဝန်းပိုင်းတစ်ခုကိုဆွဲပါ။
တစ်ဖန် **B** ကိုဗဟိုပြု၍ အချင်းဝက် 5 cm ရှိသော အဝန်းပိုင်းတစ်ခုကိုဆွဲရာ ပထမ အဝန်းပိုင်းကို C ၌ ဖြတ်ပါစေ။

အဆင့် (၄) **B** နှင့် C ၊ **D** နှင့် C တို့ကိုဆက်သွယ်ပါ။
ABCD သည် လိုအပ်သော ရွှမ်းဗတ် ဖြစ်သည်။ (ပုံ ၁.၁၀ တွင် ကြည့်ပါ။)



ပုံ ၁.၁၀

၁.၆.၂ အနားတစ်ခုနှင့်ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းတစ်ခုပေးထားသောရွှမ်းဗတ်ဆောက်လုပ်ဆွဲသားနည်း

အနားတစ်နားသည် 4 cm နှင့် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းတစ်ကြောင်းသည် 7 cm ရှိသော ရွှမ်းဗတ်ပုံ တစ်ခုရရှိရန် အောက်ပါအတိုင်း အဆင့် (၅) ဆင့်ဖြင့် ဆွဲသားမည်။

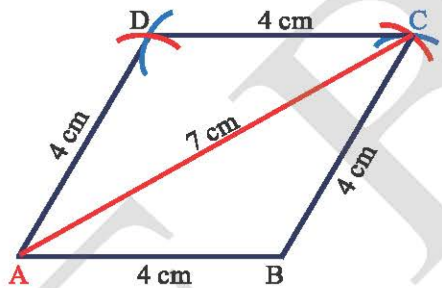
အဆင့် (၁) မျဉ်းပိုင်း AB = 4 cm ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) A ကို ဗဟိုထားပြီး အချင်းဝက် 7 cm နှင့် B ကို ဗဟိုထားပြီး အချင်းဝက် 4 cm အဝန်းပိုင်းနှစ်ခုကိုဆွဲရာ C ၌ ဖြတ်ပါစေ။

အဆင့် (၃) B နှင့် C ကိုဆက်သွယ်ပါ။

အဆင့် (၄) A ကို ဗဟိုပြု၍ အချင်းဝက် 4 cm ရှိသောအဝန်းပိုင်းတစ်ခုကိုဆွဲပါ။ တစ်ဖန် C ကို ဗဟိုပြု၍ အချင်းဝက် 4 cm ရှိသောအဝန်းပိုင်းတစ်ခုကိုဆွဲရာ ပထမအဝန်းပိုင်းကို D ၌ ဖြတ်ပါစေ။

အဆင့် (၅) A နှင့် D၊ C နှင့် D တို့ကိုဆက်သွယ်ပါ။
ABCD သည် လိုအပ်သော ရွှမ်းဗတ်ပုံ ဖြစ်သည်။ (ပုံ ၁.၁၁ ကိုကြည့်ပါ။)



ပုံ ၁.၁၁

လေ့ကျင့်ခန်း ၁.၄

၁။ အောက်တွင် ပေးထားသည့် အချက်အလက်တို့ကို သုံး၍ရွှမ်းဗတ်ပုံများ ဆွဲပါ။
(က) 4 cm ရှည်သော အနားတစ်ဖက်နှင့် 80° ရှိသော ထောင့်တစ်ထောင့်။
(ခ) 6 cm ရှည်သော ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းနှင့် 5 cm ရှည်သော အနားတစ်ဖက်။
(ဂ) 8 cm နှင့် 6 cm အသီးသီး ရှိသော ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းများ။

၂။ ရွှမ်းဗတ် ABCD တွင် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC နှင့် BD တို့သည် O ၌ တွေ့ဆုံသည်။ ΔOAB၊ ΔOAD၊ ΔOBC နှင့် ΔOCD တို့ထပ်တူညီကြပါသလား။ လက်တွေ့ပြုလုပ်၍ဖြေဆိုပါ။

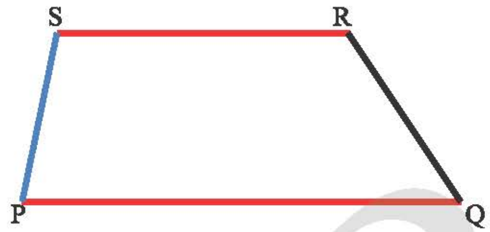
၃။ အနား PQ = 5 cm နှင့် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း PR = 7 cm ရှိသော ရွှမ်းဗတ် PQRS ကိုဆွဲပါ။ ဆောက်လုပ်ဆွဲသားနည်းအဆင့်ဆင့်ကိုဖော်ပြပါ။

၄။ အနားတစ်ဖက် 6 cm ရှိပြီး ထောင့်တစ်ထောင့် 60° ရှိသော ရွှမ်းဗတ်တစ်ခုကိုဆွဲပါ။ ဆောက်လုပ်ဆွဲသားနည်းအဆင့်ဆင့်ကိုဖော်ပြပါ။

၁.၇ ထြာပီဇီယမ်ဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်း

မျက်နှာချင်းဆိုင် အနားတစ်စုံပြိုင်သောစတုဂံကို ထြာပီဇီယမ် (trapezium) ဟုခေါ်သည်။

ပုံ ၁.၁၂ တွင် စတုဂံ PQRS ၏ မျက်နှာချင်းဆိုင် အနားတစ်စုံ ဖြစ်သော PQ နှင့် SR တို့ ပြိုင်ကြသည်။ ထို့ကြောင့် PQRS သည် ထြာပီဇီယမ် ဖြစ်သည်။



ပုံ ၁.၁၂

ယခု AB // DC, AB = 6 cm, AD = 3 cm, DC = 4 cm, $\angle A = 60^\circ$ ဟူ၍ ပေးထားသောထြာပီဇီယမ်တစ်ခုကို ဆွဲသားမည်။ လိုအပ်သောထြာပီဇီယမ်ပုံကိုရရှိရန် အောက်ပါအတိုင်းအဆင့်ဆင့် ဆောက်လုပ်ဆွဲသားမည်။

အဆင့် (၁) မျဉ်းပိုင်း AB = 6 cm ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) A တွင် $\angle BAP = 60^\circ$ ကိုဆွဲပါ။

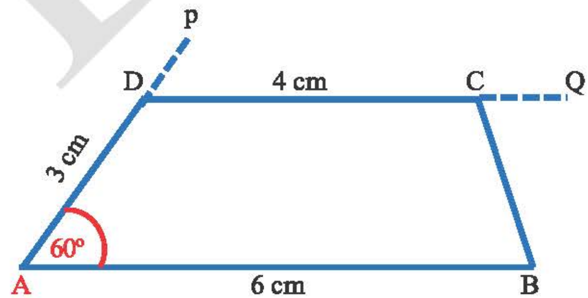
အဆင့် (၃) AP ပေါ်တွင် AD = 3 cm ကိုပိုင်းဖြတ်ပါ။

အဆင့် (၄) မျဉ်းတံနှင့်ကျင်တွယ်သုံး၍ D ကိုဖြတ်ပြီး AB // DQ ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၅) DQ ပေါ်တွင် DC = 4 cm ကိုပိုင်းဖြတ်ပါ။

အဆင့် (၆) BC ကို ဆက်သွယ်ပါ။

ပုံ ၁.၁၃ ရှိ စတုဂံ ABCD သည် လိုအပ်သောထြာပီဇီယမ်ဖြစ်သည်။



ပုံ ၁.၁၃

လေ့ကျင့်ခန်း ၁.၅

၁။ AB // DC, AB = 7 cm, $\angle B = 50^\circ$, BC = 4 cm, CD = 5 cm ရှိသော ထြာပီဇီယမ်တစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ပါ။ AD ကိုတိုင်းပါ။

၂။ PQ // SR, PQ = 4 cm, $\angle P = 90^\circ$, PS = 3 cm, SR = 6 cm ရှိသော ထြာပီဇီယမ်တစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ပါ။ SQ ကိုတိုင်းပါ။

၃။ AB // DC, AB = 5 cm, ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC = 7 cm, BC = 3 cm, CD = 4 cm ရှိသော ထြာပီဇီယမ်တစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ပါ။ AD ကိုတိုင်းပါ။

၄။ AB // DC, AB = 5 cm, ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း BD = 6 cm, AD = 3 cm, DC = 5 cm ရှိသော ထြာပီဇီယမ်တစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ပါ။ BC ကိုတိုင်းပါ။

၅။ AB // DC, DC = 7 cm, အမြင့်မျဉ်း AN = 4 cm, AD = 5 cm, AB = 4 cm ရှိသော ထြာပီဇီယမ်တစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ပါ။ $\angle A$ ကိုတိုင်းပါ။

၆။ AB // DC, AB = 9 cm, အမြင့်မျဉ်း CN = 4 cm, BC = 5 cm, CD = 3 cm ရှိသော ထြာပီဇီယမ်တစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ပါ။ BD ကိုတိုင်းပါ။

အခန်း ၂ တြိဂံများ

ဤသင်ခန်းစာတွင် တြိဂံတစ်ခု၏အလယ်မျဉ်းများ၊ အမြင့်မျဉ်းများ၊ ထောင့်ထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းများနှင့် အနားများကိုထောင့်မှန်ကျထက်ဝက်ပိုင်းသည့်မျဉ်းများအကြောင်းကို လေ့လာကြရမည်ဖြစ်သည်။ ထိုမျဉ်းများနှင့်ဆက်စပ်၍ဖြစ်ပေါ်လာသောအမှတ်များအကြောင်းကို ဆက်လက်လေ့လာကြရမည်ဖြစ်သည်။

၂.၁ ပြန်လည်လေ့လာရမည့်အကြောင်းအရာများ

တြိဂံများနှင့်ပတ်သက်၍ အောက်ပါဂုဏ်သတ္တိများကို ပြန်လည်လေ့လာထားရန်လိုအပ်သည်။

တြိဂံတစ်ခု၏အတွင်းထောင့်သုံးခုပေါင်းလဒ်သည် 180° ဖြစ်သည်။
ဥပမာ။ မည်သည့် ΔABC တွင်မဆို $\angle A+\angle B+\angle C = 180^\circ$ ဖြစ်သည်။

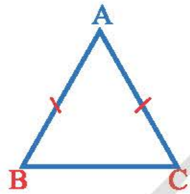
တြိဂံတစ်ခု၏အနားနှစ်နား၏ အလျားများပေါင်းခြင်းသည် ကျန်တတိယအနား၏အလျားထက်ကြီးသည်။
ဥပမာ။ မည်သည့် ΔABC တွင်မဆို
$AB + BC > CA$, $BC + CA > AB$, $CA + AB > BC$ ဖြစ်သည်။

တြိဂံတစ်ခု၏အနားနှစ်နား၏ အလျားများခြားနားခြင်းသည် ကျန်တတိယအနား၏အလျားအောက်ငယ်သည်။
ဥပမာ။ မည်သည့် ΔABC တွင်မဆို
$|AB - BC| < CA$, $|BC - CA| < AB$, $|CA - AB| < BC$
ဖြစ်သည်။

၂.၂ တြိဂံတစ်ခု၏ အနားများနှင့်ထောင့်များ၏ ဆက်သွယ်ချက်

နှစ်နားညီတြိဂံတစ်ခုတွင် တူညီသောအနားများ၏ မျက်နှာချင်းဆိုင်ထောင့်များ တူညီကြကြောင်း ဖော်ပြချက်ကို ဆဋ္ဌမတန်းတွင် တွေ့ရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ယခု လက်တွေ့စမ်းသပ်ချက်များ ပြုလုပ်ပြီး လေ့လာကြမည်။

စမ်းသပ်ချက် ၁။



ပုံ ၂.၁

အဆင့် (၁) **AB = AC** ဖြစ်သော နှစ်နားညီတြိဂံ **ABC** ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) **∠B** နှင့် **∠C** တို့ကိုတိုင်းပါ။

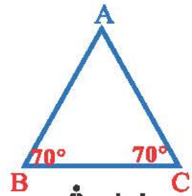
∠B = ∠C ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။

အထက်ပါစမ်းသပ်ချက်ကဲ့သို့ တူညီသောအနားများရှိသည့် တြိဂံများကိုဆွဲသား၍ လေ့လာကြည့်ပါက အောက်ပါမှန်ကန်ချက်ကို ရရှိမည်။

> တြိဂံတစ်ခုတွင်တူညီသောအနားများ၏ မျက်နှာချင်းဆိုင်ထောင့်များ တူညီကြသည်။

ယခုဆက်လက်၍ တြိဂံတစ်ခုတွင် တူညီသောထောင့်များ၏ မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများ တူညီကြကြောင်းကို လက်တွေ့စမ်းသပ်ချက်များ ပြုလုပ်ပြီး လေ့လာကြမည်။

စမ်းသပ်ချက် ၂။



ပုံ ၂.၂

အဆင့် (၁) မျဉ်းပိုင်း BC ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) ပုံ ၂.၂ တွင် ပြထားသည့်အတိုင်း $\angle B = \angle C = 70^\circ$ ဖြစ်အောင်ဆွဲပါ။

ထိုမျဉ်းနှစ်ကြောင်းသည် A ၌ ဆုံပါစေ။

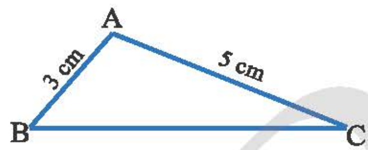
အဆင့် (၃) AB နှင့် AC တို့ကိုတိုင်းပါ။

AB = AC ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။

အထက်ပါစမ်းသပ်ချက်ကဲ့သို့ တူညီသောထောင့်များရှိသည့် တြိဂံများကို ဆွဲသား၍ လေ့လာကြည့်ပါက အောက်ပါမှန်ကန်ချက်ကို ရရှိမည်။

တြိဂံတစ်ခုတွင်တူညီသောထောင့်များ၏ မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများ တူညီကြသည်။

စမ်းသပ်ချက် ၃။



ပုံ ၂.၃

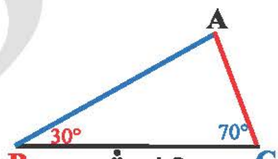
အဆင့် (၁) AB = 3 cm, AC = 5 cm ရှိသော ΔABC ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) $\angle B$ နှင့် $\angle C$ တို့ကိုတိုင်းပါ။ $\angle B > \angle C$ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။

အထက်ပါစမ်းသပ်ချက်ကဲ့သို့ မတူညီသည့်အနားများရှိသော တြိဂံများကို ဆွဲသား၍ လေ့လာကြည့်ပါက အောက်ပါမှန်ကန်ချက်ကို ရရှိမည်။

တြိဂံတစ်ခုတွင် အနားများမတူညီကြလျှင် ထိုအနားများအနက် ရှည်သောအနားနှင့်မျက်နှာချင်းဆိုင်သောထောင့်သည် တိုသောအနားနှင့်မျက်နှာချင်းဆိုင်သော ထောင့်ထက်ကြီးသည်။

စမ်းသပ်ချက် ၄။



ပုံ ၂.၄

အဆင့် (၁) မျဉ်းပိုင်း BC ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) ပုံ ၂.၄ တွင်ပြထားသည့်အတိုင်း $\angle B = 30^\circ$ နှင့် $\angle C = 70^\circ$ ဖြစ်အောင်ဆွဲပါ။

အဆင့် (၃) **AB** နှင့် **AC** မျဉ်းတို့ကိုတိုင်းပါ။

AB > **AC** ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။

အထက်ပါစမ်းသပ်ချက်ကဲ့သို့ မတူညီသောထောင့်များရှိသည့် တြိဂံများကိုဆွဲ၍ စမ်းသပ်ကြည့်ပါက အောက်ပါမှန်ကန်ချက်ကိုရရှိမည်။

တြိဂံတစ်ခုတွင်ထောင့်နှစ်ထောင့်မတူညီပါကထိုထောင့်များအနက် ကြီးသောထောင့်နှင့်မျက်နှာချင်းဆိုင်သောအနားသည် ငယ်သောထောင့်နှင့်မျက်နှာချင်းဆိုင်သောအနားထက် ရှည်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၂.၁

၁။ ΔXYZ၏ အနားများကို အောက်တွင် ဖော်ပြထားသည်။ တြိဂံ၏ထောင့်များကို ကြီးစဉ်ငယ်လိုက်စဉ်ပါ။

(က) $XY = 5$ cm, $YZ = 6.5$ cm, $XZ = 8$ cm (ခ) $YZ = 10$ cm, $XZ = 6.9$ cm, $XY = 5.4$ cm

(ဂ) $XZ = 3.5$ cm, $XY = 4$ cm, $YZ = 7$ cm

၂။ တြိဂံတစ်ခု၏ထောင့်များကို အောက်တွင်ဖော်ပြထားသည်။ တြိဂံ၏အနားများကို ငယ်စဉ်ကြီးလိုက်စဉ်ပါ။

(က) $\angle A = 90°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 40°$ (ခ) $\angle A = 35°$, $\angle B = 85°$, $\angle C = 60°$

(ဂ) $\angle A = 110°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 40°$

၃။ ΔPQR တွင် $PQ = PR$ ဖြစ်၍ $\angle P = 84°$ ဖြစ်သည်။ $\angle Q$ နှင့် $\angle R$ တို့ကို ရှာပါ။

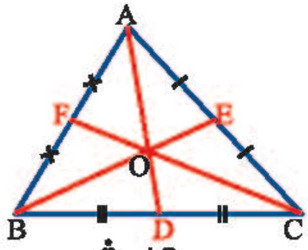
၄။ ΔABC တွင် ထောင့်နှစ်ထောင့်ပေါင်းခြင်းသည် တတိယထောင့်နှင့်တူညီလျှင် ၎င်းတြိဂံသည် မည်သည့် တြိဂံအမျိုးအစားဖြစ်သနည်း။

၅။ သုံးနားညီတြိဂံ PQR ကို $PQ = QR = RP = 3$ cm ဖြစ်အောင် မျဉ်းတံနှင့်ကွန်ပါသုံး၍ ဆွဲပါ။ ထို့နောက် ထောင့်များကို တိုင်းပါ။ မည်သည့်ရလဒ်ကိုတွေ့ရသနည်း။

၆။ ထောင့်မှန်တြိဂံ ABC တွင် $\angle A = 90°$, $AB = AC$ ဖြစ်အောင်ဆွဲပါ။ ထို့နောက် $\angle B$ နှင့် $\angle C$ တို့ကိုတိုင်းပါ။ မည်သည့်ရလဒ်များကိုတွေ့ရှိရသနည်း။

၂.၃ တြိဂံတစ်ခု၏အလယ်မျဉ်းများ

တြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်စွန်းတစ်ခုနှင့် မျက်နှာချင်းဆိုင်အနား၏ အလယ်မှတ်တို့ ဆက်သောမျဉ်းကို ထိုတြိဂံ၏ အလယ်မျဉ်း (median) ဟုခေါ်သည်။



ပုံ ၂.၅

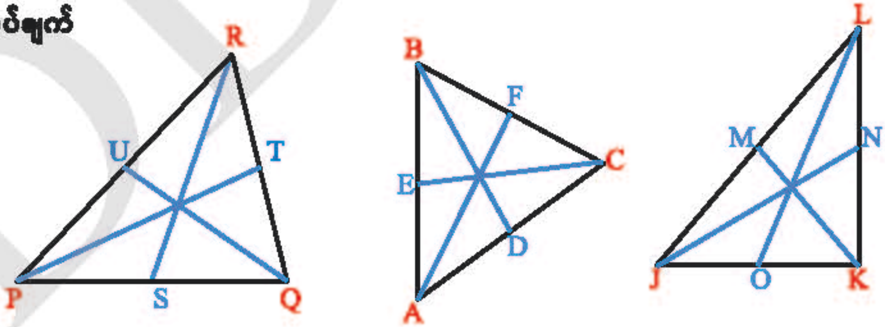
ΔABC တွင် D, E နှင့် F တို့သည် အနားး BC, CA နှင့် AB တို့၏ အလယ်မှတ်များ အသီးသီးဖြစ်ပါစေ။ (ပုံ ၂.၅ ကိုကြည့်ပါ။)

AD, BE နှင့် CF တို့သည် ΔABC ၏ အလယ်မျဉ်းများ ဖြစ်ကြသည်။

ပုံသဏ္ဌာန်မတူသော တြိဂံသုံးခု၏ အလယ်မျဉ်းများကို အောက်ပါအတိုင်းဆွဲပြီး စမ်းသပ်ကြည့်ပါက ဖော်ပြပါမှန်ကန်ချက်ကို တွေ့ရှိရမည်။

> တြိဂံတစ်ခု၏အလယ်မျဉ်းသုံးကြောင်းသည်အမှတ်တစ်ခုတည်း၌ တွေ့ဆုံကြပါသည်။ ထိုဆုံမှတ်ကို **တြိဂံ၏ဗဟိုချက်** (centroid of a traingle) ဟုခေါ်သည်။

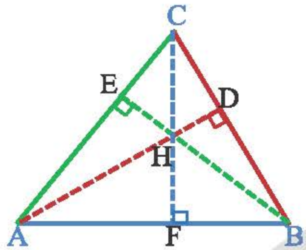
စမ်းသပ်ချက်



ပုံ ၂.၆

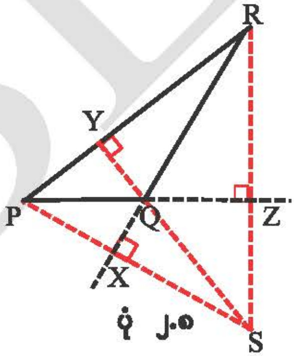
၂.၄ တြိဂံတစ်ခု၏အမြင့်မျဉ်းများ

တြိဂံတစ်ခု၏ထောင့်စွန်းတစ်ခုမှ မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားပေါ် သို့ ဆွဲထားသောထောင့်မတ်မျဉ်းကို ထိုတြိဂံ၏ **အမြင့်မျဉ်း** (altitude of a triangle) ဟုခေါ် သည်။



ပုံ ၂.၇

ΔABC တွင် **AD**, **BE** နှင့် **CF** တို့သည်ထောင့်စွန်း **A, B** နှင့် **C** အသီးသီးမှ မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများဖြစ်ကြသော **BC**, **AC** နှင့် **AB** တို့ပေါ် သို့ ထောင့်မတ်ကျအောင် ဆွဲထားသော အမြင့်မျဉ်းများ ဖြစ်ကြသည်။ (ပုံ ၂.၇ ကိုကြည့်ပါ။) ၎င်းအမြင့်မျဉ်းများသည် အမှတ် H ၌ ဆုံတွေ့ကြသည်။ အမှတ် D, E နှင့် F တို့ကို အမြင့်မျဉ်းများ၏ အခြေမှတ်များဟု ခေါ် သည်။ ထို့ကြောင့် **ΔABC** တွင် **AD** ကို အခြေ **BC** ရှိသော အမြင့်မျဉ်းဟုလည်းကောင်း၊ **BE** ကို အခြေ **AC** ရှိသော အမြင့်မျဉ်းဟုလည်းကောင်း၊ **CF** ကို အခြေ **AB** ရှိသော အမြင့်မျဉ်း ဟုလည်းကောင်း အသီးသီးခေါ် ဆိုသည်။



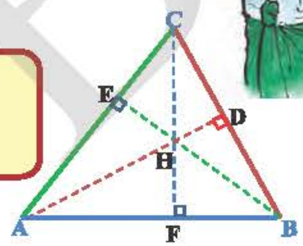
ပုံ ၂.၈

ပုံ ၂.၈ ရှိထောင့်ကျယ် **ΔPQR** တွင် **PX**, **QY** နှင့် **RZ** တို့သည်ထောင့်စွန်း P, Q နှင့် R တို့မှ မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများဖြစ်ကြသော QR, PR နှင့် PQ တို့ပေါ် သို့ ထောင့်မတ်ကျအောင်ဆွဲထားသော အမြင့်မျဉ်းများဖြစ်ကြသည်။ အမြင့်မျဉ်းများဆွဲရာတွင် လိုအပ်ပါက အခြေအနားများကို ဆက်ဆွဲရကြောင်းသတိပြုပါ။ ၎င်းအမြင့်မျဉ်းများသည် တြိဂံ၏အပြင်ဘက်ရှိ အမှတ် S ၌ ဆုံတွေ့ကြကြောင်း တွေ့ရသည်။

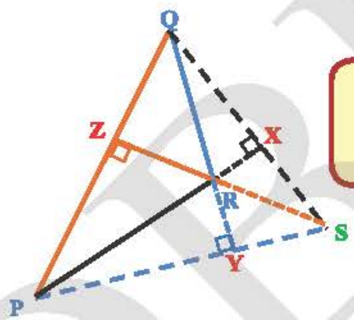
နှစ်သက်ရာတြိဂံအမျိုးမျိုးဆွဲ၍ အမြင့်မျဉ်းများဆွဲကြည့်ပါ။ တြိဂံတိုင်းတွင်အမြင့်မျဉ်းများသည် အမှတ်တစ်မှတ်တည်း၌ တွေ့ဆုံကြသည်ကို မြင်ရမည်။ ထို့ကြောင့် အောက်ပါမှန်ကန်ချက်ကို ရရှိသည်။

တြိဂံတစ်ခု၏အမြင့်မျဉ်းသုံးကြောင်းသည် အမှတ်တစ်ခုတည်း၌ တွေ့ဆုံကြပါသည်။ ၎င်းအမှတ်ကို **တြိဂံ၏အမြင့်မျဉ်းများဆုံမှတ်** (orthocentre of a triangle) ဟု ခေါ်သည်။

ထောင့်ကျဉ်းတြိဂံ၊ ထောင့်ကျယ်တြိဂံနှင့် ထောင့်မှန်တြိဂံအသီးသီးတို့၏ အမြင့်မျဉ်းများ ဆုံမှတ်တွေ ဘယ်လိုရှိနိုင်သလဲ

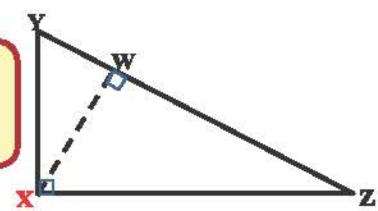


ထောင့်ကျဉ်းတြိဂံတစ်ခုတွင် အမြင့်မျဉ်းများဆုံမှတ်သည် တြိဂံ၏အတွင်း၌ပင်ရှိသည်။



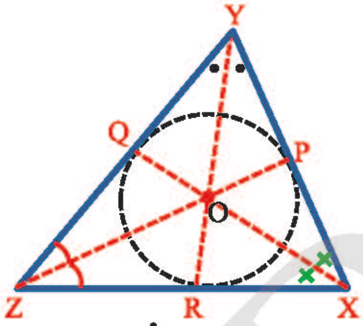
ထောင့်ကျယ်တြိဂံတစ်ခုတွင်အမြင့်မျဉ်းများဆုံမှတ်သည် တြိဂံ၏အပြင်ဘက်၌ ကျရောက်သည်။

ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခု၏အမြင့်မျဉ်းများဆုံမှတ်သည် ထောင့်မှန်ထောင့်၏ ထိပ်စွန်းမှတ် ဖြစ်သည်။



၂.၅ တြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်ထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းများ

တြိဂံတစ်ခု၏အတွင်းထောင့်များကို ထက်ဝက်ပိုင်းသောမျဉ်း (bisector) များဆွဲပါက ၎င်းမျဉ်းများသည် အမှတ်တစ်မှတ်တည်း၌ ဆုံကြသည်ကိုတွေ့ရမည်။ (ပုံ ၂.၉ ကိုကြည့်ပါ။)



ပုံ ၂.၉

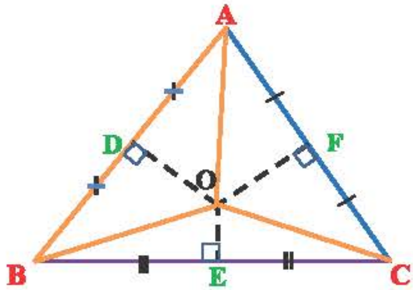
ပုံသဏ္ဌာန်မတူသောတြိဂံများဆွဲ၍ ထောင့်ထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းများကို ဆွဲသားကြည့်ပါက ၎င်းမျဉ်းများသည် အမှတ်တစ်မှတ်တည်း၌ ဆုံကြကြောင်းတွေ့ရမည်။

> **တြိဂံတစ်ခု၏ အတွင်းထောင့်များ၏ထောင့်ထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းများသည် အမှတ်တစ်ခုတည်း၌ ဆုံကြသည်။ ၎င်းအမှတ်သည် တြိဂံ၏အနားများကို ထိနေသော အတွင်းထိစက်ဝိုင်း၏ဗဟိုဖြစ်သောကြောင့် တွင်းထိစက်ဝိုင်းဗဟို** (incentre of a triangle) **ဟုခေါ်သည်။**

တြိဂံ၏ပုံသဏ္ဌာန်သည်မည်သို့ပင်ဖြစ်စေကာမူ အတွင်းထောင့်ထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းသုံးကြောင်းသည် တြိဂံ၏အတွင်း၌ပင်ရှိ၍ ၎င်းတို့တွေ့ဆုံရာအမှတ်ဖြစ်သော တြိဂံ၏တွင်းထိစက်ဝိုင်းဗဟိုသည်လည်း တြိဂံ၏အတွင်း၌ပင်ရှိသည်။

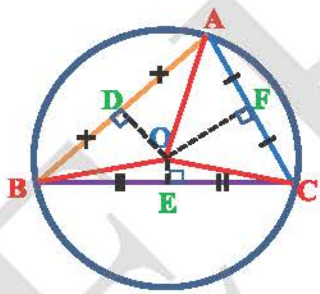
၂.၆ တြိဂံတစ်ခု၏ အနားများကိုထောင့်မှန်ကျထက်ဝက်ပိုင်းသောမျဉ်းများ

ΔABC တွင် အနား AB, BC နှင့် CA တို့ကို **ထောင့်မှန်ကျထက်ဝက်ပိုင်းသောမျဉ်းများ** (perpendicular bisectors)ကိုဆွဲပါ။ ထိုမျဉ်းတို့သည် AB, BC နှင့် CA တို့၏အလယ်မှတ်များဖြစ်ကြသော D, E နှင့် F တို့၌ ထောင့်မှန်ကျနေသည်။ ၎င်းတို့သည် အမှတ်တစ်ခုတည်း၌ တွေ့ဆုံကြသည်။ ထိုအမှတ်ကို O ဟုမှတ်သားပါ။ တစ်ဖန် OA, OB နှင့် OC တို့ကို ဆက်သွယ်၍ တိုင်းကြည့်ပါ။ $OA = OB = OC$ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရမည်။ (ပုံ ၂.၁၀ ကိုကြည့်ပါ။)



ပုံ ၂.၁၀

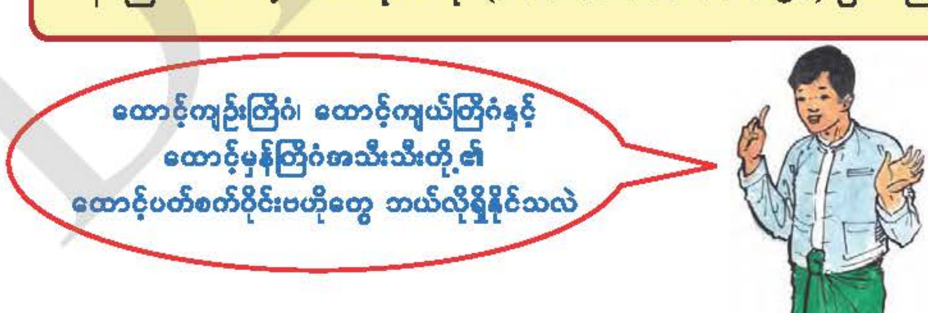
ထို့နောက် O ကို ဗဟိုပြု၍ အချင်းဝက် OA သို့မဟုတ် OB သို့မဟုတ် OC ဖြင့် စက်ဝိုင်းတစ်ခုဆွဲသားလျှင်ထောင့်စွန်းမှတ် A, B နှင့် C တို့ကို ဖြတ်သွားကြောင်းတွေ့ရမည်။ (ပုံ ၂.၁၁ ကိုကြည့်ပါ။)



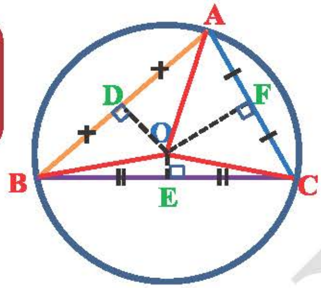
ပုံ ၂.၁၁

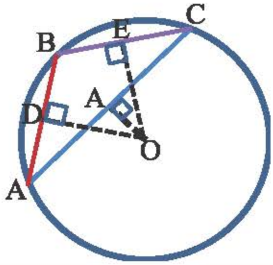
ထိုစက်ဝိုင်းကို ထောင့်ပတ်စက်ဝိုင်း (circumcircle) ဟုခေါ်သည်။ တြိဂံ၏အနားများကို ထောင့်မတ်ကျထက်ဝက်ပိုင်းသောမျဉ်းများ၏ ဆုံမှတ်သည် ထောင့်ပတ်စက်ဝိုင်း၏ ဗဟိုဖြစ်သည်။ ထို့ကြောင့် အောက်ပါအချက်ကို မှတ်သားနိုင်သည်။

တြိဂံတစ်ခု၏အနားများကို ထောင့်မှန်ကျထက်ဝက်ပိုင်းသောမျဉ်းများဆုံမှတ်သည် ၎င်းတြိဂံ၏ **ထောင့်ပတ်စက်ဝိုင်းဗဟို** (circumcentre of a triangle) ဖြစ်သည်။



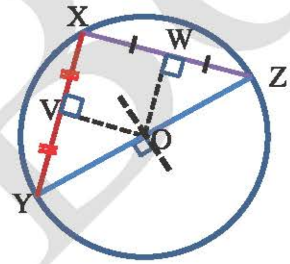
ထောင့်ကျဉ်းတြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်ပတ်စက်ဝိုင်း ဗဟိုသည် တြိဂံအတွင်း၌ပင်ရှိသည်။





ထောင့်ကျယ်တြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်ပတ်စက်ဝိုင်းဗဟိုသည် ၎င်းတြိဂံ၏အပြင်ဘက်၌ ရှိသည်။

ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်ပတ်စက်ဝိုင်းဗဟိုသည် ၎င်း၏ ထောင့်မှန်ခံအနားပေါ်တွင်ရှိ၍ ထောင့်မှန်ခံအနား၏အလယ်မှတ်ပင်ဖြစ်သည်။



လေ့ကျင့်ခန်း ၂.၂

၁။ အောက်ပါ ကွက်လပ်တို့ကို ဖြည့်ပါ။

တြိဂံတစ်ခုတွင်

(က) အလယ်မျဉ်း သုံးကြောင်းဆုံသော အမှတ်ကို -------- ဟုခေါ်သည်။

(ခ) အမြင့်မျဉ်း သုံးကြောင်းဆုံသော အမှတ်ကို -------- ဟုခေါ်သည်။

(ဂ) ထောင့်ထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်း သုံးကြောင်းဆုံသော အမှတ်ကို ------- ဟုခေါ်သည်။

(ဃ) အနားများကို ထောင့်မှန်ကျထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းသုံးကြောင်း ဆုံသောအမှတ်ကို------ဟုခေါ်သည်။

၂။ ΔABC ကိုဆွဲပါ။ ၎င်း၏ အလယ်မျဉ်း AD နှင့် BE တို့ကိုဆွဲသားပါ။ ၎င်းတို့၏ ဖြတ်မှတ်ကို G ဟုခေါ်ပါ။ CG ကို ဆက်သွယ်၍ AB ကို F ၌ တွေ့ဆုံအောင်ဆွဲပါ။ ရရှိလာသောပုံတွင် အောက်ပါတို့ကို တိုင်းတာဆန်းစစ်ပါ။

(က) F သည် AB ၏ အလယ်မှတ်ဖြစ်ပါသလား။

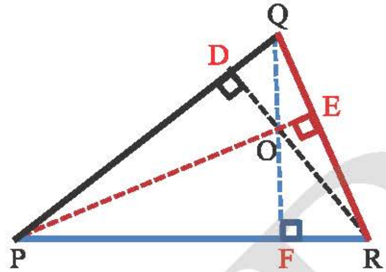
(ခ) $AG = 2\,GD$, $BG = 2\,GE$ နှင့် $CG = 2\,GF$ ဖြစ်ပါသလား။

၃။ ပုံတွင် ΔPQR သည်ထောင့်ကျဉ်းတြိဂံတစ်ခုဖြစ်သည်။ O သည်၎င်းတြိဂံ၏ အမြင့်မျဉ်းများဆုံမှတ် ဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့ကိုဖြေပါ။

(က) ΔPOQ ၏ အမြင့်မျဉ်းများဆုံမှတ်ကို ဖော်ပြပါ။

(ခ) ΔPOR ၏ အမြင့်မျဉ်းများဆုံမှတ်ကို ဖော်ပြပါ။

(ဂ) P သည် ΔROQ ၏ အမြင့်မျဉ်းများဆုံမှတ် ဖြစ်ပါသလား။



၄။ သုံးနားညီတြိဂံ WXY ကိုဆွဲပါ။ အလယ်မျဉ်းများဆွဲ၍ ၎င်းတို့၏ ဆုံမှတ်ကို Z ဟုထားပါ။ အောက်ပါတို့ကို မှန် မမှန် ဆန်းစစ်ပါ။

(က) Z သည် ΔWXY ၏ အမြင့်မျဉ်းများဆုံမှတ် ဖြစ်ပါသလား။

(ခ) Z သည် ΔWXY ၏ ထောင့်ပတ်စက်ဝိုင်းဗဟို ဖြစ်ပါသလား။

(ဂ) Z သည် ΔWXY ၏ တွင်းထိစက်ဝိုင်းဗဟို ဖြစ်ပါသလား။

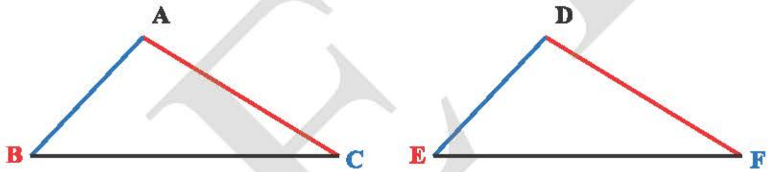
အခန်း ၃ တြိဂံများဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်းနှင့်ထပ်တူညီခြင်း

တြိဂံတစ်ခုတွင် ထောင့်သုံးထောင့်နှင့်အနားသုံးနားတို့သည် ထိုတြိဂံ၏အခြေခံများဖြစ်သည်ကို သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ဤသင်ခန်းစာတွင် ပုံများထပ်တူညီခြင်း၊ တြိဂံများ ဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်းနှင့် တြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီစေမည့်အခြေအနေများကို လေ့လာကြမည်။

ဤသင်ခန်းစာကိုလေ့လာပြီးပါက အနားသုံးနားပေးထားသောတြိဂံ၊ အနားနှစ်နားနှင့် ကြားထောင့်ပေးထားသောတြိဂံ၊ နှစ်ထောင့်နှင့်တစ်နားပေးထားသောတြိဂံနှင့်ထောင့်မှန်ခံအနားနှင့်ကျန်အနားတစ်ဖက်ပေးထားသောထောင့်မှန်တြိဂံတို့ကိုဆောက်လုပ်ဆွဲသားတတ်မည်။ ထို့ပြင် တြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီသောနည်းလမ်းများကိုလည်း ဖော်ထုတ်တတ်မည်။

၃.၁ ပုံများထပ်တူညီခြင်း

ပြင်ညီပေါ်ရှိပုံနှစ်ခုကို ပုံတူကတ်ပြားနှစ်ခုပြုလုပ်၍ တစ်ခုပေါ်တစ်ခုထပ်ကြည့်ပါက တစ်ထပ်တည်းကျနေလျှင် ထိုပုံများ **ထပ်တူညီသည်** ဟုဆိုသည်။



ပုံတွင် $\triangle ABC$ နှင့် $\triangle DEF$ တို့သည် ထပ်တူညီကြသည်။ အဘယ်ကြောင့်ဆိုသော် $\triangle ABC$ နှင့် $\triangle DEF$ တို့ကို ထပ်ကြည့်လျှင် သက်ဆိုင်ရာထောင့်များဖြစ်သော $\angle A$ နှင့် $\angle D$၊ $\angle B$ နှင့် $\angle E$၊ $\angle C$ နှင့် $\angle F$ တို့တူညီကြပြီး သက်ဆိုင်ရာအနားများဖြစ်သော AB နှင့် DE၊ BC နှင့် EF၊ AC နှင့် DF တို့တူညီနေသည်ကိုတွေ့နိုင်သည်။

ထို့ကြောင့် သက်ဆိုင်ရာအနားများနှင့် သက်ဆိုင်ရာထောင့်များ အချင်းချင်းတူညီလျှင် ထိုတြိဂံနှစ်ခုသည် ထပ်တူညီတြိဂံများဖြစ်သည်။ တစ်နည်းဆိုသော် ထပ်တူညီတြိဂံနှစ်ခုတွင် သက်ဆိုင်ရာထောင့်များနှင့် အနားများအချင်းချင်း တူညီကြသည်။

၃.၂ အနားသုံးနားပေးထားသောတြိဂံတစ်ခုကိုဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်း

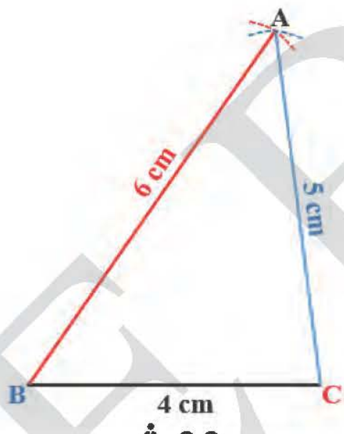
တြိဂံတစ်ခု၏အနားသုံးနားအလျားများမှာ 4 cm, 5 cm နှင့် 6 cm ဖြစ်သည်ဆိုပါစို့။ အနားသုံးနားပေးထားသော တြိဂံတစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ဆွဲသားရာ၌ လုပ်ဆောင်ရမည့်အဆင့်များမှာ အောက်ပါအတိုင်းဖြစ်သည်။

အဆင့် (၁) 4 cm ရှိသော မျဉ်းပိုင်း BC ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) B ကိုဗဟိုအဖြစ်ယူ၍ အချင်းဝက် 6 cm ရှိသော စက်ဝန်းပိုင်းတစ်ခုကို ဆွဲပါ။

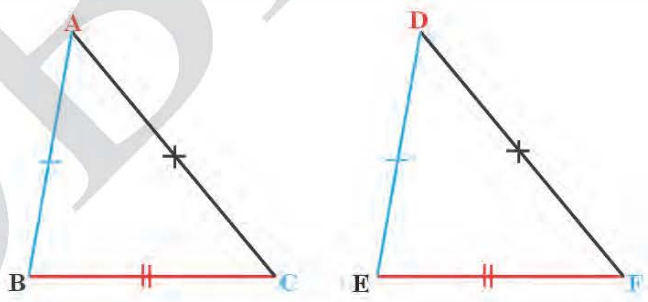
အဆင့် (၃) C ကိုဗဟိုအဖြစ်ယူ၍ အချင်းဝက် 5 cm ဖြင့် စက်ဝန်းပိုင်းတစ်ခုကိုဆွဲပါ။ ပထမ စက်ဝန်းပိုင်းကို A အမှတ်၌ ဖြတ်ပါစေ။

အဆင့် (၄) A နှင့် B, A နှင့် C တို့ကို ဆက်သွယ်ပါ။ ထိုအခါ တြိဂံ ABC သည် အလျား 4 cm, 5 cm နှင့် 6 cm အသီးသီးရှိသောအနား BC, CA နှင့် AB တို့ဖြင့် ဆောက်လုပ်ထားသည့် လိုအပ်သော တြိဂံဖြစ်သည်။ (ပုံ ၃.၁ ကိုကြည့်ပါ။)



ပုံ ၃.၁

၃.၃ အနားအသီးသီးတူညီသောတြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီခြင်း

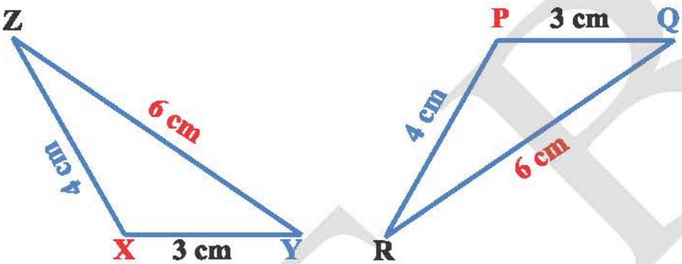


ပုံ ၃.၂

တြိဂံတစ်ခု၏အနားသုံးနားသည် အခြားတြိဂံတစ်ခု၏အနားသုံးနားနှင့် အသီးသီး တူညီကြလျှင် ထိုတြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီသည်။ ဆိုလိုသည်မှာ ΔABC နှင့် ΔDEF တို့တွင် $AB = DE$, BC = EF, CA = FD ဖြစ်လျှင် ΔABC နှင့် ΔDEF တို့ တစ်ထပ်တည်းကျသောကြောင့် ယင်းတြိဂံတို့ ထပ်တူညီကြသည်။ ΔABC နှင့် ΔDEF တို့ထပ်တူညီခြင်းကို သင်္ကေတအားဖြင့် $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ဟု ရေးသားသည်။ ထိုအခါ၌ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့နိုင်သည်။

AB နှင့် DE, BC နှင့် EF, CA နှင့် FD တို့ကို **လိုက်ဖက်သောအနားများ**၊ $\angle A$ နှင့် $\angle D$, $\angle B$ နှင့် $\angle E$, $\angle C$ နှင့် $\angle F$ တို့ကို **လိုက်ဖက်သောထောင့်များ** ဟုခေါ်ပြီး ၎င်းတို့အားလုံးကို ထပ်တူညီတြိဂံနှစ်ခု၏ **လိုက်ဖက်သောအစိတ်အပိုင်းများ** ဟုခေါ်သည်။ ထိုသို့ အနားသုံးနားညီ၍တြိဂံနှစ်ခု ထပ်တူညီခြင်းကို **အနားသုံးနားထပ်တူညီခြင်း** သို့မဟုတ် **နနန ထပ်တူညီခြင်း** (SSS congruence) ဟုခေါ်သည်။

ဥပမာ။



XY = PQ
YZ = QR
ZX = RP
$\therefore \Delta XYZ \cong \Delta PQR$

မှတ်ချက်။ ။ တြိဂံတစ်ခု၏အနားများအလျားကိုပေးထားလျှင် ယင်းပုံသဏ္ဌာန်နှင့် အရွယ်အစားကို တိကျစွာ ဖော်ပြနိုင်သည်။

> **အနားသုံးနားအသီးသီးတူညီကြသော တြိဂံနှစ်ခု၏ ထပ်တူညီခြင်းကို အနားသုံးနားထပ်တူညီခြင်း သို့မဟုတ် နနန ထပ်တူညီခြင်း (SSS congruence) ဟုခေါ်သည်။**

ပုံစံတွက်။ ပေးထားသော ထောင့်မှန်စတုဂံ ABCD တွင်

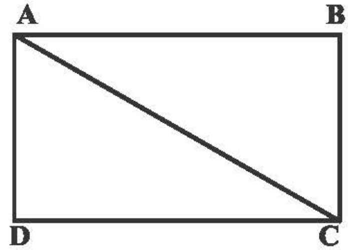
AC သည် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းတစ်ခုဖြစ်သည်။

အောက်ပါတို့ကို အကြောင်းပြချက်များဖြင့်ဖြေဆိုပါ။

(က) AB = CD ဖြစ်ပါသလား။

(ခ) BC = DA ဖြစ်ပါသလား။

(ဂ) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ဖြစ်ပါသလား။



အဖြေ။

(က) AB = CD ဖြစ်သည်။ (ထောင့်မှန်စတုဂံ၏မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများ)

(ခ) BC = DA ဖြစ်သည်။ (ထောင့်မှန်စတုဂံ၏မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားများ)

(ဂ) AB = CD (ပြပြီး)

BC = DA (ပြပြီး)

AC = AC (ဘုံအနား)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CDA$ (နနန ထပ်တူညီခြင်း)

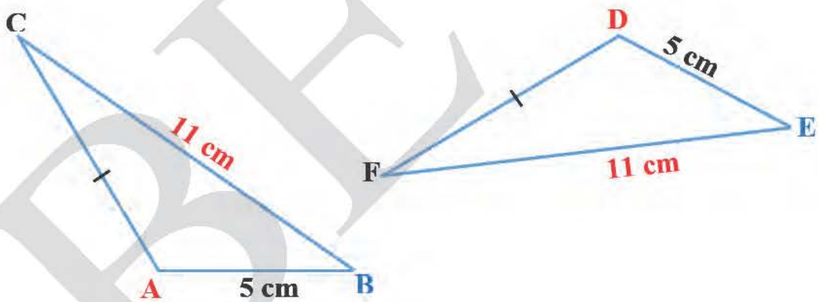
လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၁

၁။ အောက်ပါအနားများကိုအသုံးပြု၍ ΔABC ကိုဆွဲပါ။

(က) BC = 3 cm, CA = 4 cm, AB = 5 cm (ခ) BC = 5.3 cm, CA = 5 cm, AB = 4 cm

(ဂ) BC = 4 cm, CA = AB = 5.7 cm (ဃ) BC = CA = AB = 5.5 cm

၂။ အောက်ပါတြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီပါသလား။ အဘယ်ကြောင့်ဆိုသည်ကို အောက်ပါကွက်လပ်များ ဖြည့်ခြင်းဖြင့် ဖြေဆိုပါ။



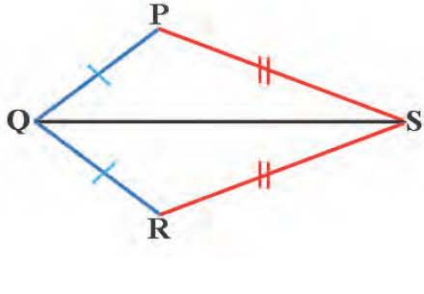
(က) AB = -----

(ခ) BC = -----

(ဂ) AC = ----- (ပေးချက်)

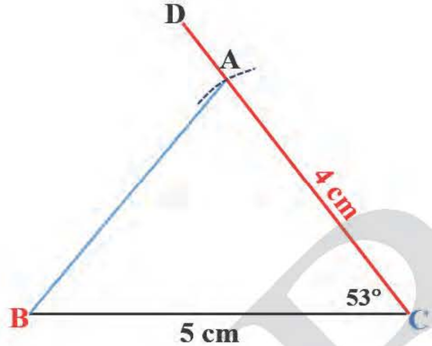
$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta$ -------- (------ ထပ်တူညီခြင်း)

၃။ စွန်ပုံ PQRS ကိုပေးထားသည်။ ΔPQS နှင့် ΔRQS တို့ထပ်တူညီကြောင်း အကြောင်းပြချက်ဖြင့် ဖြေဆိုပါ။



၃.၄ အနားနှစ်နားနှင့်ကြားထောင့်ပေးထားသောတြိဂံတစ်ခုကိုဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်း

တြိဂံတစ်ခုတွင် အနားနှစ်ဖက်အလျားများမှာ 5 cm နှင့် 4 cm ဖြစ်ကြပြီး ယင်းတို့ကြားရှိ ထောင့်သည် 53° ဟုပေးထားသည်။ လိုအပ်သော တြိဂံရရှိစေရန် အောက်ပါလုပ်ဆောင်ချက် အဆင့်ဆင့်ကို ပြုလုပ်ပါ။



ပုံ ၃.၃

အဆင့် (၁) 5 cm အလျားရှိသော မျဉ်းပိုင်း BC ကိုဆွဲပါ။

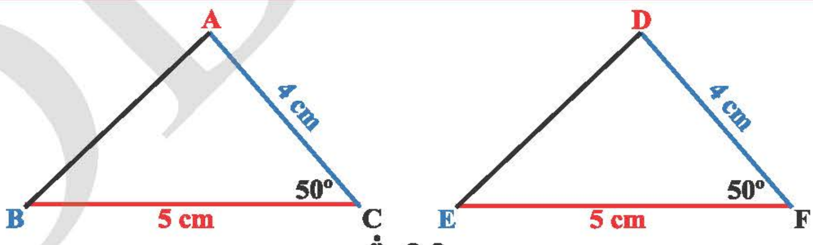
အဆင့် (၂) C ၌ $\angle BCD = 53°$ ဖြစ်အောင် ဆွဲပါ။

အဆင့် (၃) $\angle BCD$ ၏ လက်တံအနား CD ပေါ်တွင် CA = 4 cm ဖြစ်အောင်ဖြတ်ပါ။

အဆင့် (၄) A နှင့် B ဆက်သွယ်ပါ။ (ပုံ ၃.၃ ကိုကြည့်ပါ။)

ထိုအခါ ΔABC သည် BC = 5 cm, CA = 4 cm, ကြားထောင့် $\angle BCA = 53°$ ရှိသော လိုအပ်သည့်တြိဂံဖြစ်သည်။

၃.၅ အနားနှစ်နားနှင့်ကြားထောင့်တို့အသီးသီးတူညီသောတြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီခြင်း

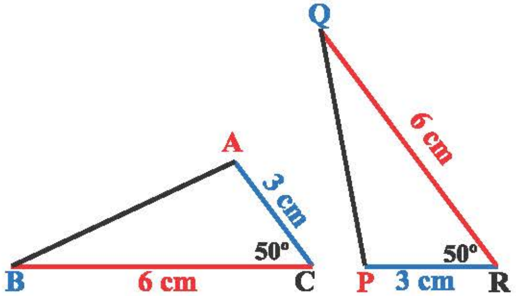


ပုံ ၃.၄

BC = EF = 5 cm, CA = FD = 4 cm နှင့် $\angle BCA = \angle EFD = 50°$ အသီးသီးရှိသော ΔABC နှင့် ΔDEF တို့ကို စာရွက်ပေါ်တွင်ဆွဲပါ။ (ပုံ ၃.၄ ကိုကြည့်ပါ။) ထို့နောက် တြိဂံနှစ်ခုကို ဖြတ်ထုတ်ပြီးထပ်ကြည့်ပါက တြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီသည်ကိုတွေ့ရသည်။ ဆိုလိုသည်မှာ ΔABC နှင့်

ΔDEF တို့တွင်အနားနှစ်စုံ $BC = EF$, $CA = FD$ နှင့် ထိုအနားများ၏ကြားရှိထောင့် $\angle BCA = \angle EFD$ ဖြစ်လျှင် $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ဖြစ်သည်။ ထိုထပ်တူညီခြင်းကို **နှစ်နားကြားထောင့်ထပ်တူညီခြင်း** သို့မဟုတ် **နထန ထပ်တူညီခြင်း** (SAS congruence) ဟုခေါ်သည်။

ဥပမာ။



$BC = QR$

$CA = RP$

$\angle C = \angle R$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$

မှတ်ချက်(၁) နှစ်နားကြားထောင့်ထပ်တူညီခြင်းသည် မည်သည့်အနားနှစ်နားနှင့်ကြားထောင့်အတွက် မဆို မှန်ကန်သည်။

မှတ်ချက်(၂) အနားနှစ်နားနှင့်ကြားထောင့်တို့၏ပမာဏများပေးထားလျှင် ယင်းတြိဂံ၏ပုံသဏ္ဌာန် နှင့် အရွယ်အစားကို တိကျစွာ ဖော်ပြနိုင်သည်။

အနားနှစ်နားနှင့် ကြားထောင့်တို့တူညီသောတြိဂံနှစ်ခု၏ ထပ်တူညီခြင်းကို နှစ်နား ကြားထောင့်ထပ်တူညီခြင်း သို့မဟုတ် နထနထပ်တူညီခြင်း (SAS congruence) ဟုခေါ်သည်။

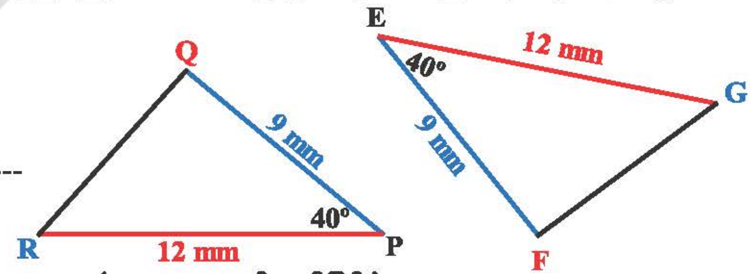
လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၂

၁။ အောက်ပါပေးထားချက်များကိုအသုံးပြု၍ တြိဂံများဆွဲပါ။

(က) $AB = 4.6$ cm, $BC = 3.7$ cm, $\angle B = 60°$

(ခ) $PQ = QR = 5$ cm, $\angle Q = 65°$

၂။ အောက်ပါတြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီကြောင်းသက်သေပြရန် လိုအပ်သည့်အချက်များကို ကွက်လပ်တွင် ဖြည့်ပါ။

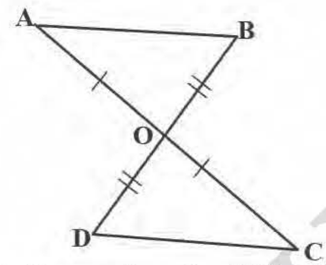


(က) PQ = --------

(ခ) $\angle QPR$ = ---------

(ဂ) PR = --------

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta$ ---------- (--------- ထပ်တူညီခြင်း)



၃။ ပုံတွင် OA = OC, OB = OD ဖြစ်လျှင်

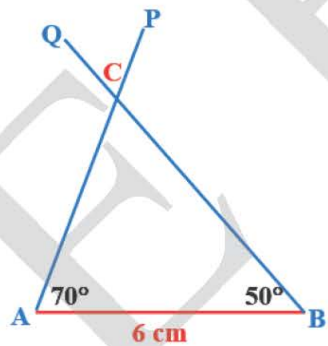
(က) ΔAOB နှင့် ΔCOD တို့ထပ်တူညီပါသလား။ အဘယ်ကြောင့်နည်း။

(ခ) CD နှင့်တူညီသော အနားကိုဖော်ပြပါ။

၄။ AB = 5 cm, AC = 5 cm နှင့် $\angle A = 60°$ ရှိသော ΔABC ကိုဆွဲပါ။ $\angle A$ ၏ထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းကို ဆွဲရာ BC ကို X တွင်တွေ့ပါစေ။ ΔABX နှင့် ΔACX တို့ထပ်တူညီပါသလား။

၃.၆ နှစ်ထောင့်နှင့်တစ်နားပေးထားသောတြိဂံတစ်ခုဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်း

တြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်နှစ်ထောင့်မှာ 70° နှင့် 50° ဖြစ်ကြပြီး ထိုထောင့်နှစ်ထောင့်၏ နီးစပ်အနားသည် 6 cm ဟုပေးထားသည်။ လိုအပ်သောတြိဂံရရှိရန် အောက်ပါလုပ်ဆောင်ချက် အဆင့်ဆင့်အတိုင်း ပြုလုပ်ပါ။



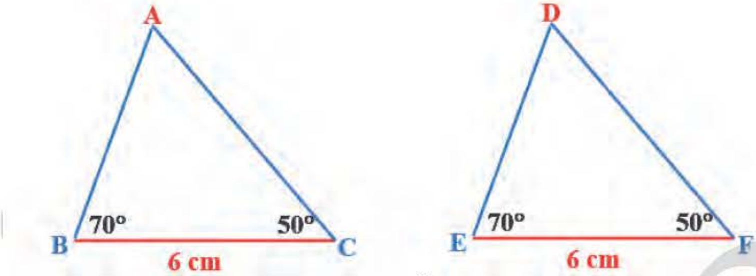
ပုံ ၃.၅

အဆင့် (၁) 6 cm ရှိသော မျဉ်းပိုင်း AB ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) A အမှတ်၌ $\angle PAB = 70°$ ဖြစ်အောင်ဆွဲပါ။

အဆင့် (၃) B အမှတ်၌ $\angle ABQ = 50°$ ဖြစ်အောင်ဆွဲရာ BQ သည် AP ကို C ၌ ဖြတ်ပါစေ။ ထိုအခါ ΔABC သည် $\angle A$ နှင့် $\angle B$ တို့၌ 70° နှင့် 50° အသီးသီးရှိကြ၍ ယင်းတို့၏ နီးစပ်အနား AB = 6 cm ရှိသော တြိဂံဖြစ်သည်။ (ပုံ ၃.၅ ကိုကြည့်ပါ။)

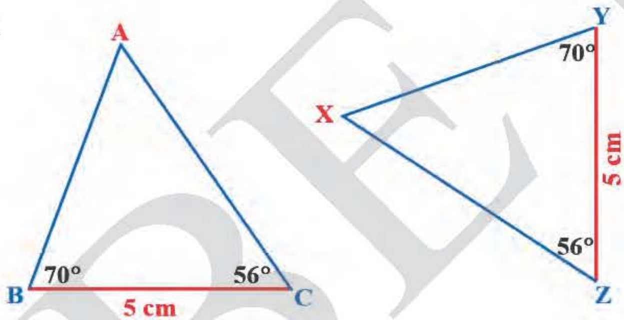
၃.၇ ထောင့်နှစ်ထောင့်နှင့်အနားတစ်နားတို့အသီးသီးတူညီသောတြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီခြင်း



ပုံ ၃.၆

ပုံ ၃.၆ ကဲ့သို့ $\angle B = \angle E = 70°$, $\angle C = \angle F = 50°$ နှင့် $BC = EF = 6$ cm ရှိသော ΔABC နှင့် ΔDEF တို့ကိုစာရွက်ပေါ်တွင်အသီးသီးဆွဲ၍ ထိုတြိဂံနှစ်ခုကိုဖြတ်ထုတ်ပြီး ထပ်ကြည့်ပါက $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ဖြစ်သည်ကိုတွေ့ရသည်။ ဆိုလိုသည်မှာ ΔABC နှင့် ΔDEF တို့တွင် $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ နှင့် $BC = EF$ ဖြစ်လျှင် $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ဖြစ်သည်။ ထိုထပ်တူညီခြင်းကို **နှစ်ထောင့်တစ်နားထပ်တူညီခြင်း** သို့မဟုတ် **ထထနထပ်တူညီခြင်း** (AAS congruence) ဟုခေါ်သည်။

ဥပမာ။



$\angle B = \angle Y$

$\angle C = \angle Z$

$BC = YZ$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta XYZ$

မှတ်ချက် (၁) တြိဂံတစ်ခု၏ထောင့်နှစ်ထောင့်ကို ပေးထားလျှင် ကျန်ထောင့်ကို ရှာနိုင်သည်။ ထို့ကြောင့် အထက်ပါထပ်တူညီခြင်းတွင် "နီးစပ်အနား" အစား "လိုက်ဖက်အနားတစ်နား" ဟု ဖော်ပြနိုင်သည်။

မှတ်ချက် (၂) တြိဂံတစ်ခု၏ထောင့်နှစ်ထောင့်နှင့် လိုက်ဖက်အနားတစ်နား ပေးထားလျှင် ယင်းတြိဂံ၏ ပုံသဏ္ဌာန်နှင့်အရွယ်အစားကို တိကျစွာဖော်ပြနိုင်သည်။

ထောင့်နှစ်ထောင့်နှင့်လိုက်ဖက်အနားတစ်နားတို့ အသီးသီးတူညီသော တြိဂံနှစ်ခု၏ ထပ်တူညီခြင်းကို နှစ်ထောင့်တစ်နား ထပ်တူညီခြင်း သို့မဟုတ် ထထန ထပ်တူညီခြင်း (AAS congruence) ဟုခေါ်သည်။

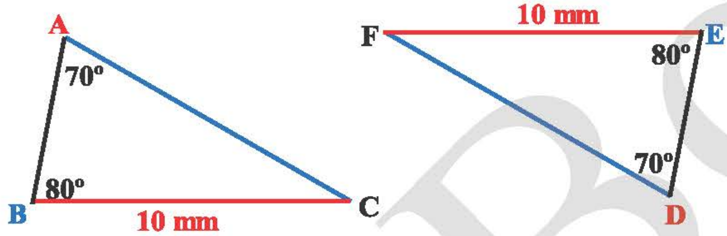
လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၃

၁။ အောက်ပါပေးထားချက်များကိုသုံး၍ ΔABC ကိုဆွဲပါ။

(က) $BC = 3.7$ cm, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 75^\circ$

(ခ) $AB = 5.6$ cm, $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 30^\circ$

၂။ အောက်ပါတြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီစေရန် လိုအပ်သည့်အကြောင်းပြချက်များကို ကွက်လပ်တွင်ဖြည့်ပါ။



ΔABC တွင် $\angle BCA = 180^\circ - ($-----$^\circ$ + ------$^\circ)$ = ------ $^\circ$

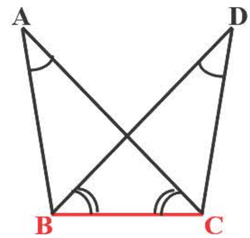
ΔDEF တွင် $\angle EFD = 180^\circ - ($-----$^\circ$ + ------$^\circ)$ = ------ $^\circ$

(က) $\angle ABC$ = -------

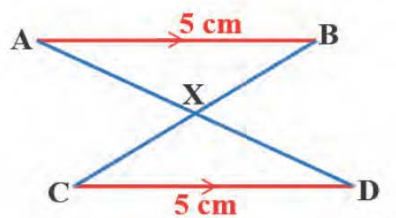
(ခ) $\angle BCA$ = -------

(ဂ) BC = -------

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta$ --------- (--------- ထပ်တူညီခြင်း)



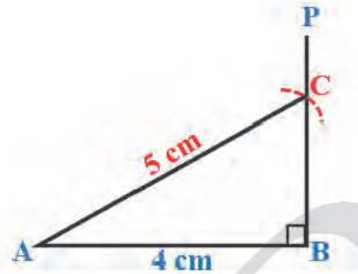
၃။ ပေးထားသောပုံတွင် မည်သည့်ထောင့်များတူညီပါသနည်း။ ΔABC နှင့် ΔDCB တို့ ထပ်တူညီကြပါသလား။ အကြောင်းပြချက်များဖြင့်ဖြေပါ။



၄။ ပေးထားသောပုံတွင် $AB \parallel CD$ ဖြစ်သည်။ $\Delta ABX \cong \Delta DCX$ ဖြစ်ကြောင်း အကြောင်းပြချက်များဖြင့်ဖြေပါ။

၃.၈ ထောင့်မှန်ခံအနားနှင့်ကျန်အနားတစ်နားပေးထားသောထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ဆွဲသားခြင်း

တြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်မှန်ခံအနားသည် 5 cm ဖြစ်၍ ကျန်အနားတစ်ဖက်သည် 4 cm ဖြစ်ပါစေ။ အောက်ပါလုပ်ဆောင်ချက်အဆင့်ဆင့်ကိုပြုလုပ်၍ လိုအပ်သောထောင့်မှန်တြိဂံကို ဆွဲသားမည်။



ပုံ ၃.၇

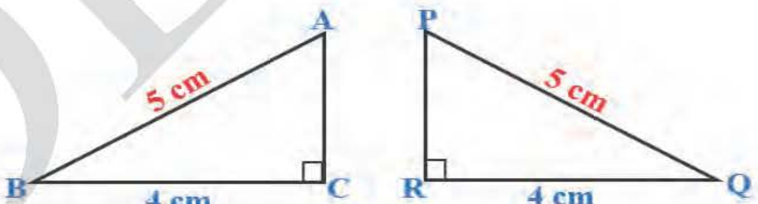
အဆင့် (၁) 4 cm ရှိသော မျဉ်းပိုင်း AB ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) B တွင် BP $\perp$ AB ဆွဲပါ။

အဆင့် (၃) A ကို ဗဟိုအဖြစ်ယူ၍ အချင်းဝက် 5 cm ရှိသည့်စက်ဝန်းပိုင်းတစ်ခုဆွဲပါ။ BP ကို C တွင် ဖြတ်ပါစေ။

အဆင့် (၄) A နှင့် C ကိုဆက်သွယ်ပါ။ (ပုံ ၃.၇ ကိုကြည့်ပါ။)
ထိုအခါ ΔABC သည် AB = 4 cm, AC = 5 cm နှင့် $\angle$B သည် ထောင့်မှန်ဖြစ်သဖြင့် လိုအပ်သော ထောင့်မှန်တြိဂံ ဖြစ်သည်။

၃.၉ ထောင့်မှန်ခံအနားနှင့်ကျန်အနားတစ်နားတို့အသီးသီးတူညီသောထောင့်မှန် တြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီခြင်း

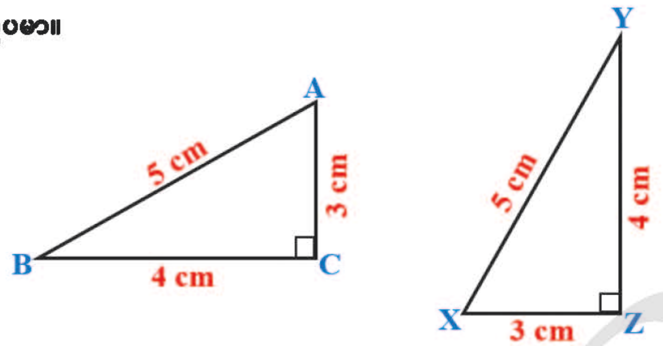


ပုံ ၃.၈

ပုံ ၃.၈ ကဲ့သို့ $\angle$C = $\angle$R = 90°, BC = QR = 4 cm, AB = PQ = 5 cm အသီးသီးရှိသော ΔABC နှင့် ΔPQR တို့ကို စာရွက်ပေါ်တွင်ဆွဲပါ။ ထို့နောက် တြိဂံနှစ်ခုကိုဖြတ်ထုတ်ပြီး ထပ်ကြည့်ပါက ΔABC $\cong$ ΔPQR ဖြစ်သည်ကိုတွေ့ရသည်။ ဆိုလိုသည်မှာ ထောင့်မှန်ခံအနား AB = ထောင့်မှန်ခံ

အနား PQ ဖြစ်ပြီး BC = RQ ဖြစ်လျှင် $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ဖြစ်သည်။ ထိုထပ်တူညီခြင်းကို **ထောင့်မှန်ခံအနားနှင့်ကျန်အနားတစ်ဖက်ထပ်တူညီခြင်း** သို့မဟုတ် **မနနထပ်တူညီခြင်း** (RHS congruence) ဟုခေါ်သည်။

ဥပမာ။



$\angle C = \angle Z = 90°$

AB = XY

AC = XZ

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta XYZ$

မှတ်ချက်။ ။ ထောင့်မှန်ခံအနားနှင့်ကျန်အနားတစ်ဖက်ပေးထားလျှင် ထောင့်မှန်တြိဂံ၏ပုံသဏ္ဌာန်နှင့်အရွယ်အစားကို တိကျစွာ ဖော်ပြနိုင်သည်။

ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်မှန်ခံအနားနှင့်ကျန်အနားတစ်ဖက်သည် အခြားထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်မှန်ခံအနားနှင့်ကျန်အနားတစ်ဖက်တို့ အသီးသီးတူညီကြလျှင် ထိုထပ်တူညီခြင်းကို ထောင့်မှန်ခံအနားနှင့် ကျန်အနားတစ်ဖက်ထပ်တူညီခြင်း သို့မဟုတ် **မနန ထပ်တူညီခြင်း** (RHS congruence) ဟုခေါ်သည်။

တြိဂံများကိုဆောက်လုပ်ဆွဲသားရာတွင် အခြေခံသုံးချက်လိုအပ်ပြီး အနည်းဆုံးအနားတစ်ဖက်၏အလျားသိရှိမှသာ ပြည့်စုံတိကျသောတြိဂံကို ဆောက်လုပ်နိုင်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၄

၁။ အောက်ပါပေးထားချက်များကိုသုံး၍ ထောင့်မှန်တြိဂံဆွဲပါ။

(က) ထောင့်မှန်ခံအနား = 6.3 cm၊ အနားတစ်ဖက် = 4.1 cm

(ခ) ထောင့်မှန်ခံအနား = 4.9 cm၊ အနားတစ်ဖက် = 3.7 cm

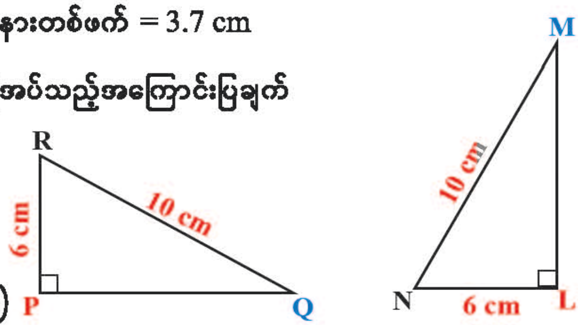
၂။ အောက်ပါတြိဂံနှစ်ခုထပ်တူညီစေရန် လိုအပ်သည့်အကြောင်းပြချက်များကို ကွက်လပ်တွင်ဖြည့်ပါ။

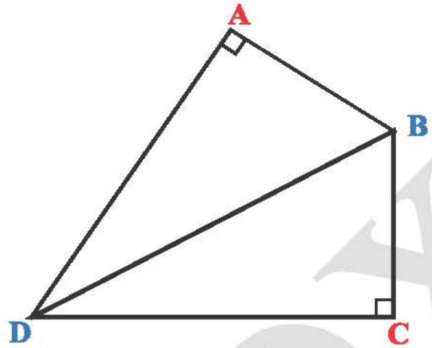
$\angle L = \angle P = 90°$

LN = -----

MN = -----

$\Delta LMN \cong \Delta PQR$ (----- ထပ်တူညီခြင်း)





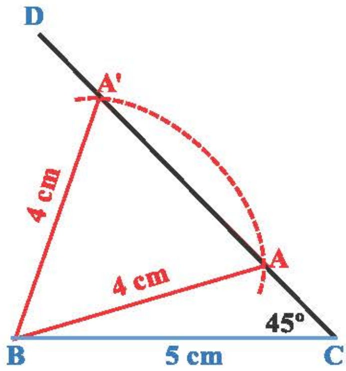
၃။ ပုံတွင် AB = BC ဖြစ်သည်။ ΔABD နှင့် ΔCBD ထပ်တူညီကြောင်းအကြောင်းပြချက်များဖြင့်ဖြေပါ။

၃.၁၀ အစွန်းထွက်ဖြစ်ရပ် (The Ambiguous Case)

တြိဂံများကိုဆောက်လုပ်ဆွဲသားရာတွင် အခြေခံအချက်သုံးချက်လိုအပ်သည်။ အနည်းဆုံး အနားတစ်ဖက်၏အလျားသိရှိမှသာဆောက်လုပ်နိုင်သည်ကို သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ သို့သော် အနားနှစ်ဖက်နှင့်ကြားထောင့်မဟုတ်သော အခြားထောင့်တစ်ထောင့်ပေးထားလျှင် ခြွင်းချက်ရှိသည်။ ပေးထားချက်နှင့်ကိုက်ညီသောတြိဂံနှစ်ခုရှိနိုင်သည်။

ဥပမာ။

AB = 4 cm, BC = 5 cm နှင့် $\angle BCA = 45°$ ရှိသော ΔABC ကိုဆောက်လုပ်ဆွဲသားရန် အောက်ပါအတိုင်းအဆင့်ဆင့်ပြုလုပ်ပါ။



အဆင့် (၁) 5 cm ရှိသော မျဉ်းပိုင်း BC ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) C တွင် $\angle BCA = 45°$ ဆွဲပါ။

အဆင့် (၃) B ကိုဗဟိုပြု၍ အချင်းဝက် 4 cm ဖြင့် စက်ဝန်းပိုင်း တစ်ခုဆွဲပါ။ ပုံတွင် စက်ဝန်းပိုင်းပြတ်သည် CD ကို အမှတ် A နှင့် A' တို့၌ ဖြတ်သွားကြောင်း တွေ့ရသည်။

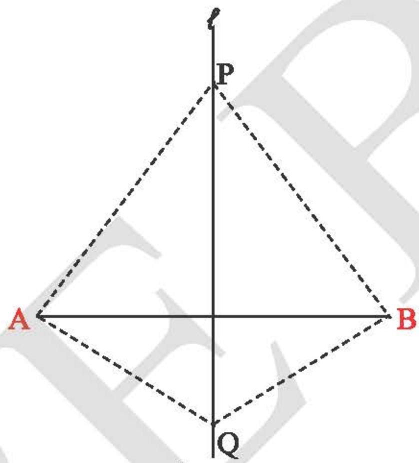
အဆင့် (၄) A နှင့် B ၊ A' နှင့် B တို့ကို ဆက်ပါ။

ထိုအခါ ΔABC နှင့် $\Delta A'BC$ တို့တွင် ပေးထားသော အခြေခံသုံးခုလုံးပါရှိသည်။ သို့သော် တြိဂံနှစ်ခုသည် ပုံသဏ္ဌာန်နှင့်အရွယ်အစားတို့ ကွဲပြားနေသည်ကို တွေ့ရသည်။ ဤဖြစ်ရပ်ကို **အစွန်းထွက်ဖြစ်ရပ်** ဟုခေါ်သည်။

အခန်း ၄ ခေါက်ချိုးညီခြင်း

ဆဋ္ဌမတန်းတွင် မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းအရ ခေါက်ချိုးညီခြင်းအကြောင်းကို လေ့လာခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ဤသင်ခန်းစာတွင် ခေါက်ချိုးညီဝင်ရိုးပေါ်ရှိ အမှတ်များအကြောင်းနှင့် အမှတ်တစ်မှတ်အရ ခေါက်ချိုးညီခြင်းအကြောင်းတို့ကို ဆက်လက်လေ့လာကြရမည်ဖြစ်သည်။ သင်ခန်းစာကိုလေ့လာပြီးပါက အမှတ်တစ်မှတ်အရ ခေါက်ချိုးညီသောပုံများကို လက်တွေ့သိမြင် လုပ်ဆောင်ရယူနိုင်မည်ဖြစ်သည်။

၄.၁ ခေါက်ချိုးညီဝင်ရိုးပေါ်ရှိအမှတ်များ



ပုံ ၄.၁

အဆင့် (၁) စာရွက်လွတ်တစ်ရွက်ကို အလယ်တွင်ခေါက်၍ ထိုခေါက်ရိုးအတိုင်းမျဉ်းတစ်ကြောင်းဆွဲပြီး ℓ ဟုခေါ်ပါ။

အဆင့် (၂) စာရွက်ကိုခေါက်၍ ခေါက်ရိုးနှင့် အနည်းငယ်ဝေးသောနေရာတွင် ပင်အပ်ဖြင့်ထိုးဖောက်ပြီး စာရွက်ကို ပြန်ဖြန့်ပါ။

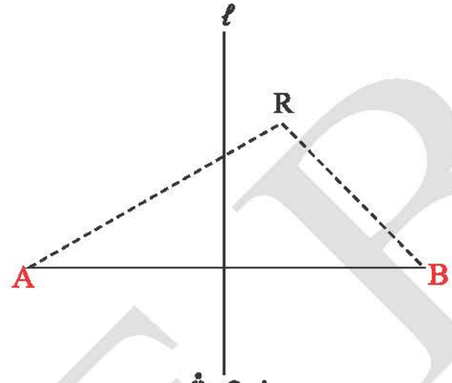
အဆင့် (၃) ဖောက်လိုက်သောအမှတ်နှစ်မှတ်ကို A နှင့် B ဟုခေါ်ပါ။ ထို့နောက် မျဉ်း ℓ ပေါ်တွင် ကြိုက်နှစ်သက်ရာနေရာ၌ အမှတ်တစ်မှတ်ကိုယူ၍ P ဟုထားပါ။

အဆင့် (၄) P ကို A နှင့် B တို့ဖြင့်ဆက်ပါ။ မျဉ်းဖြောင့် ℓ တစ်လျှောက် စာရွက်ကိုခေါက်လိုက်ပါ။ PA နှင့် PB ကိုမည်သို့တွေ့ရှိရသနည်း။
(PA နှင့် PB သည် တစ်ခုပေါ်တစ်ခု အတိအကျ ကျရောက်နေကြောင်း တွေ့ရသည်။) ထို့ကြောင့် PA = PB ဖြစ်သည်။

အဆင့် (၅) တစ်ဖန် ℓ ပေါ်၌ AB ၏ အခြားတစ်ဖက်တွင် အမှတ်တစ်မှတ်ကိုယူ၍ Q ဟု ထားပါ။ အဆင့် (၄) တွင်စမ်းသပ်ခဲ့သည့်အတိုင်း ထပ်မံပြုလုပ်ပါ။ $QA = QB$ ဖြစ်သည်ကိုလည်း တွေ့ရမည်။

ထို့ကြောင့် အမှတ်နှစ်မှတ်၏ ခေါက်ချိုးညီဝင်ရိုးပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်းသည် ထိုအမှတ်နှစ်မှတ်မှ တူညီစွာကွာဝေးကြောင်း လက်တွေ့ပြုလုပ်သိရှိနိုင်သည်။

ဆက်လက်၍ ခေါက်ချိုးညီဝင်ရိုး ℓ ပေါ်တွင်မရှိသော အမှတ်တစ်မှတ်နှင့်ပတ်သက်၍ လေ့လာကြမည်။



ပုံ ၄.၂

အဆင့် (၁) ပြုလုပ်ခဲ့ပြီးသော စမ်းသပ်ချက် အဆင့် (၁) နှင့် (၂) တို့ကို ပြန်လည်ပြုလုပ်ပါ။

အဆင့် (၂) ဖောက်လိုက်သောအမှတ်နှစ်မှတ်ကို A နှင့် B ဟုအမည်ပေးပါ။ ထို့နောက် ℓ ပေါ်တွင် မရှိသည့် အမှတ်တစ်မှတ်ကိုယူ၍ R ဟုထားပါ။

အဆင့် (၃) R ကို A နှင့် B တို့ဖြင့်ဆက်ပါ။ မျဉ်းဖြောင့် ℓ တစ်လျှောက်စာရွက်ကို ခေါက်လိုက်ပါ။ RA နှင့် RB ကို မည်သို့တွေ့ရှိရသနည်း။
(RA နှင့် RB သည်တစ်ခုပေါ်တစ်ခု မကျရောက်ကြောင်း တွေ့ရသည်။)
RA နှင့် RB တို့ကိုတိုင်းတာကြည့်ပါက RA နှင့် RB မတူညီကြောင်းတွေ့ရမည်။

ထို့ကြောင့် အမှတ်နှစ်မှတ်၏ ခေါက်ချိုးညီဝင်ရိုးပေါ်တွင်မရှိသော အမှတ်တိုင်းသည် ထိုအမှတ်နှစ်မှတ်မှ အကွာအဝေးမတူညီကြကြောင်း လက်တွေ့ပြုလုပ်သိရှိနိုင်သည်။

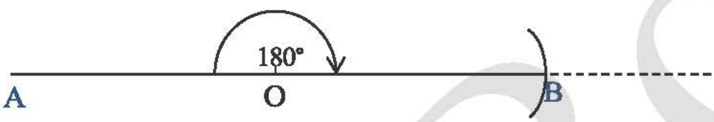
- အမှတ်နှစ်မှတ်၏ ခေါက်ချိုးညီဝင်ရိုးပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်းသည် ထိုအမှတ်နှစ်မှတ်မှ တူညီစွာကွာဝေးသည်။
- အပြန်အလှန်အားဖြင့် အမှတ်နှစ်မှတ်မှ တူညီစွာကွာဝေးသောအမှတ်တိုင်းသည် ထိုအမှတ်နှစ်မှတ်၏ ခေါက်ချိုးညီဝင်ရိုးပေါ်တွင်ရှိသည်။

မှတ်ချက်။ ။ခေါက်ချိုးညီဝင်ရိုး ℓ သည် AB ကို ထက်ဝက်ပိုင်းပြီး ထောင့်မတ်ကျသဖြင့် ℓ သည် AB ၏ ထောင့်မတ်ကျထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းဖြစ်သည်။

၄.၂ အမှတ်တစ်မှတ်အရခေါက်ချိုးညီခြင်း

မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းအရ ခေါက်ချိုးညီခြင်းကို သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ယခုအမှတ်တစ်မှတ်အရ ခေါက်ချိုးညီခြင်းအကြောင်းကို ဆက်လက်လေ့လာကြမည်။

၄.၂.၁ အမှတ်တစ်မှတ်အရ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်များ



ပုံ ၄.၃

အဆင့် (၁)　အမှတ်နှစ်မှတ် A နှင့် O ကိုယူပြီး ဆက်သွယ်ပါ။

အဆင့် (၂)　O ကို ခေါက်ချိုးညီအမှတ်အဖြစ်ယူဆပြီး AO မျဉ်းကို ဆက်ဆွဲပါ။

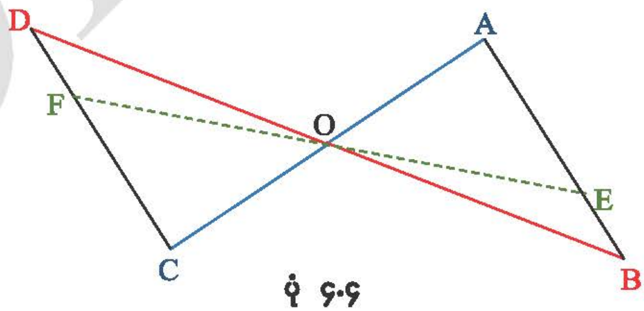
အဆင့် (၃)　O ကိုဗဟိုပြု၍ OA ၏အလျားအတိုင်း အဝန်းပိုင်းတစ်ခုကို A မှနေ၍ 180° လှည့်ပြီးဆွဲပါ။ AO ဆက်ဆွဲမျဉ်းကို B ၌ တွေ့ပါစေ။

အဆင့် (၄)　OA = OB ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရမည်။

ထို့ကြောင့် B သည် အမှတ် O အရ A ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်ဖြစ်သကဲ့သို့ A သည်လည်း အမှတ် O အရ B ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်ဖြစ်သည်။ A နှင့် B တို့သည် အမှတ် O အရ ခေါက်ချိုးညီကြသည်ဟုဆိုသည်။

အမှတ် A, O, B တို့သည် မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းတည်းပေါ်တွင် ကျရောက်ပြီး OA = OB ဖြစ်လျှင် O ကို A နှင့် B တို့၏ **ခေါက်ချိုးညီဗဟို** (centre of symmetry) ဟုခေါ်သည်။

၄.၂.၂ အမှတ်တစ်မှတ်အရ ခေါက်ချိုးညီမျဉ်းပိုင်းများ



ပုံ ၄.၄

အဆင့် (၁) AB မျဉ်းပိုင်းတစ်ခုကိုဆွဲပါ။ ယင်းမျဉ်းပိုင်းပေါ်တွင် မကျရောက်သော အမှတ်တစ်မှတ် O ကိုယူပါ။

အဆင့် (၂) အမှတ် O အရ A ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ် C နှင့် B ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ် D တို့ကိုရှာပြီး C နှင့် D ကို ဆက်ပါ။

အဆင့် (၃) AB ပေါ်တွင် အမှတ်တစ်မှတ် E ကိုယူပြီး အမှတ် O အရ ယင်း၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ် F ကိုရှာလျှင် အမှတ် F သည် မျဉ်းပိုင်း CD ပေါ်တွင် ကျရောက်ကြောင်း တွေ့ရမည်။

မျဉ်းပိုင်း AB ပေါ်တွင်ရှိသော အခြားအမှတ်များအတွက် ဤသို့သောစမ်းသပ်မှုကို ပြုလုပ်မည်ဆိုပါက ထိုအမှတ်များ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်များသည်လည်း မျဉ်းပိုင်း CD ပေါ်တွင် ကျရောက်နေကြောင်း တွေ့ရမည်။

သို့ဖြစ်၍ မျဉ်းပိုင်း AB ပေါ်ရှိ အမှတ်အားလုံး၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်များသည် မျဉ်းပိုင်း CD ပေါ်တွင် ကျရောက်နေပေမည်။ အပြန်အလှန်အားဖြင့် CD ပေါ်ရှိ အမှတ်အားလုံး၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်များသည်လည်း AB ပေါ်တွင် ကျရောက်နေပေမည်။

ထို့ကြောင့် အမှတ် O အရ AB ၏ ခေါက်ချိုးညီမျဉ်းပိုင်းသည် CD ဖြစ်သကဲ့သို့ အမှတ် O အရ CD ၏ ခေါက်ချိုးညီမျဉ်းပိုင်းသည် AB ဖြစ်သည်။ မျဉ်းပိုင်း AB နှင့် CD တို့သည် အမှတ် O အရ ခေါက်ချိုးညီကြသည်ဟုဆိုပြီး O ကို မျဉ်းပိုင်း AB နှင့် CD တို့၏ **ခေါက်ချိုးညီဗဟို** ဟုခေါ်သည်။

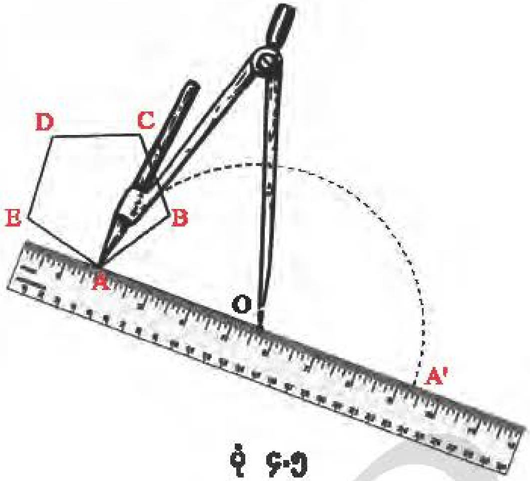
၄.၂.၃ အမှတ်တစ်မှတ်အရ ခေါက်ချိုးညီပုံများ

အမှတ်တစ်မှတ်အရ မျဉ်းပိုင်းတစ်ခု၏ခေါက်ချိုးညီခြင်းအကြောင်းကိုသိရှိပြီးနောက် အမှတ်တစ်မှတ်အရ ဂျီဩမေတြီပုံများ၏ ခေါက်ချိုးညီခြင်းအကြောင်းကို ဆက်လက်လေ့လာကြမည်။ ဥပမာအားဖြင့် ပဥ္စဂံပုံကို အသုံးပြု၍လေ့လာကြမည်။

အဆင့် (၁) စာရွက်လွတ်တစ်ရွက်ပေါ်တွင် ပဥ္စဂံ ABCDE ကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) ထိုစာရွက်ပေါ်တွင် အမှတ်တစ်မှတ် O ကိုယူပါ။

အဆင့် (၃) O နှင့် A အမှတ်နှစ်မှတ်၌ ပေတံကို တစ်တန်းတည်းဖြစ်အောင်ထားပါ။ O ကို ဗဟိုပြုကာ ကွန်ပါဖြင့် OA ၏ အလျားအတိုင်း A မှစ၍ 180° လှည့်ပြီး A' အမှတ်ကို ရယူပါ။

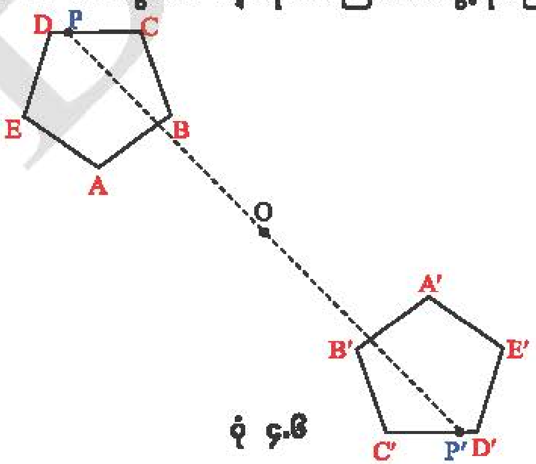


ပုံ ၄.၅

အဆင့် (၄) အမှတ် O အရ A ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်သည် A′ ဖြစ်သည်။ B ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ် B′ နှင့် C, D, E တို့၏ခေါက်ချိုးညီအမှတ်များဖြစ်သည့် C′, D′, E′ တို့ကို အဆင့် (၃) အတိုင်းရယူပါ။

အဆင့် (၅) A′ နှင့် B′ ၊ B′ နှင့် C′ ၊ C′ နှင့် D′ ၊ D′ နှင့် E′ ၊ E′ နှင့် A′ တို့ကို ဆက်ပါ။ ပဉ္စဂံအသစ် A′B′C′D′E′ ကိုရရှိမည်။

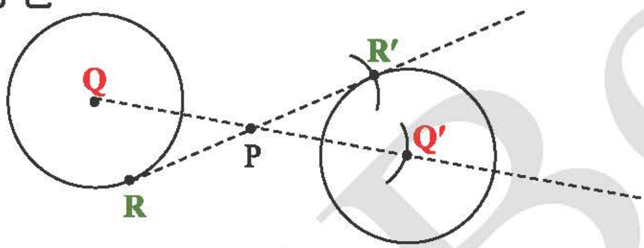
အဆင့် (၆) ပဉ္စဂံ ABCDE ၏ ကြိုက်နှစ်သက်ရာအနားပေါ်တွင် အမှတ် P ကိုယူပါ။ ထို့နောက် အမှတ် O အရ ယင်း၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ် P′ ကိုရှာမည်။ အမှတ် P′ သည် ပဉ္စဂံအသစ် A′B′C′D′E′ ၏ အနားတစ်ခုပေါ်တွင် ကျရောက်ကြောင်း တွေ့ရမည်။ ABCDE ပေါ်တွင်ရှိသော အခြားအမှတ်များအတွက်လည်း ဤသို့သော စမ်းသပ်မှုကို ပြုလုပ်ကြည့်ပါက ထိုအမှတ်များ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်များသည် A′B′C′D′E′ ပေါ်တွင်ပင် ကျရောက်ကြောင်း တွေ့ရသည်။



ပုံ ၄.၆

ထို့ကြောင့် ရရှိလာသော ပဉ္စဂံပုံအသစ်သည် အမှတ် O အရ မူလပဉ္စဂံ၏ ခေါက်ချိုးညီပုံ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရမည်။ ပဉ္စဂံပုံအသစ်နှင့် မူလပဉ္စဂံပုံသည် အမှတ် O အရ ခေါက်ချိုးညီကြသည် ဟုဆိုသည်။ အမှတ် O ကို မူလပဉ္စဂံပုံနှင့် ပဉ္စဂံပုံအသစ်တို့၏ **ခေါက်ချိုးညီဗဟို** ဟုခေါ်သည်။ မူလပုံအား ပုံ၏ပြင်ပရှိအမှတ် O ကိုပတ်၍ 180° လှည့်ခြင်းအားဖြင့် မူလပုံ၏ခေါက်ချိုးညီပုံ အသစ်ကို ရနိုင်သည်။ ဤအချက်ကို တြိဂံပုံ၊ စတုဂံပုံများဖြင့် ဆက်လက်ပြုလုပ်စမ်းသပ်ကြည့်ပါ။

ယခု ဂျီဩမေတြီပုံများထဲမှတစ်ခုဖြစ်သော စက်ဝိုင်းပုံ၏ ခေါက်ချိုးညီပုံရရှိရန် ဆက်လက် လုပ်ဆောင်ကြည့်ကြမည်။



ပုံ ၄.၇

အဆင့် (၁) စာရွက်လွတ်တစ်ရွက်တွင် Q ဗဟိုရှိသောစက်ဝိုင်းတစ်ခုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) ထိုစာရွက်ပေါ်တွင် အမှတ်တစ်မှတ် P ကိုယူပါ။

အဆင့် (၃) Q နှင့် P အမှတ်နှစ်မှတ်၌ ပေတံကို တစ်တန်းတည်းဖြစ်အောင်ထား၍ P ကို ဗဟိုပြုကာ PQ ၏အလျားအတိုင်း Q မှစ၍ 180° လှည့်ပြီး Q′ အမှတ်ကိုရယူပါ။

အဆင့် (၄) စက်ဝိုင်း၏အဝန်းပေါ်၌ အခြားအမှတ်တစ်မှတ် R ကိုယူပြီး အဆင့် (၃) အတိုင်း လုပ်ဆောင်လျက် R ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ် R′ ကိုရယူပါ။

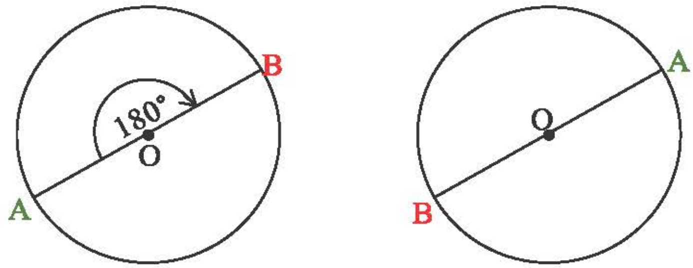
အဆင့် (၅) Q′ ကိုဗဟိုပြု၍ Q′R′ အကွာအဝေးကို အချင်းဝက်အဖြစ်ထားပြီး စက်ဝိုင်းတစ်ခု ဆွဲပါ။

ထိုအခါ ရရှိလာသောစက်ဝိုင်းအသစ်သည် အမှတ် P အရ မူလစက်ဝိုင်း၏ ခေါက်ချိုး ညီပုံဖြစ်သည်။ အမှတ် P သည် မူလစက်ဝိုင်းနှင့် စက်ဝိုင်းအသစ်တို့၏ ခေါက်ချိုးညီဗဟို ဖြစ်သည်။

အထက်ပါသင်ခန်းစာများသည် အမှတ်တစ်မှတ်အရ အမှတ်တစ်မှတ်၏ ခေါက်ချိုးညီခြင်း၊ မျဉ်းပိုင်းတစ်ခု၏ ခေါက်ချိုးညီခြင်းနှင့် ဂျီဩမေတြီပုံတစ်ခု၏ ခေါက်ချိုးညီခြင်းတို့ကို လေ့လာခြင်း ဖြစ်သည်။ ထိုသို့အမှတ်တစ်မှတ်အရ ခေါက်ချိုးညီခြင်းကို **ဗဟိုခေါက်ချိုးညီခြင်း** (central symmetry) ဟုလည်းခေါ်သည်။

ဆက်လက်၍ ဂျီဩမေတြီပုံအချို့၏ ဗဟိုအမှတ်၌ ခေါက်ချိုးညီခြင်းအကြောင်းကို လေ့လာ ကြမည်။

၄.၂.၄ စက်ဝိုင်း

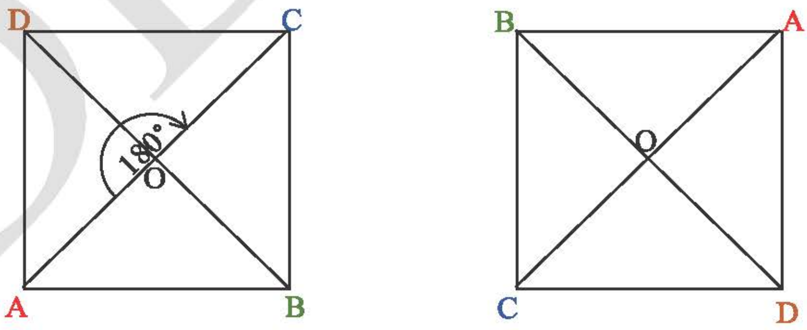


ပုံ ၄.၈

O ဗဟိုရှိသောစက်ဝိုင်းတွင် AOB သည် အချင်းမျဉ်းဖြစ်သည်။ ဗဟို O သည် အချင်းမျဉ်း AB ကို ထက်ဝက်ပိုင်းဖြတ်သောကြောင့် A နှင့် B အမှတ်နှစ်မှတ်တို့သည် အမှတ် O အရ ခေါက်ချိုးညီကြသည်။ စက်ဝိုင်း၏အဝန်းပေါ်ရှိ အမှတ်တစ်မှတ်၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်သည် ယင်းအမှတ်ကိုဖြတ်၍ ဆွဲထားသော အချင်းမျဉ်း၏ အခြားတစ်ဖက်စွန်းတွင်ရှိသည်။ ထို့ကြောင့် စက်ဝိုင်း၏အဝန်းပေါ်ရှိ အမှတ်အားလုံး၏ ဗဟိုမှတ်အရခေါက်ချိုးညီသော အမှတ်များသည် ယင်းစက်ဝိုင်း၏အဝန်းပေါ်ရှိ အမှတ်အားလုံးပင်ဖြစ်သည်။

တစ်နည်းအားဖြင့် အောက်ပါကဲ့သို့ ဆင်ခြင်ကြည့်နိုင်သည်။ ဗဟို O ကိုပတ်၍ 180° လှည့်လျှင် အချင်းမျဉ်း AOB သည် အချင်းမျဉ်း BOA အဖြစ် မူလပုံနှင့် ထပ်တူကျနေကြောင်း တွေ့ရမည်။ စက်ဝိုင်းပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်းသည် ယင်း၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်များနှင့် နေရာဖလှယ် နေကြောင်း တွေ့ရသည်။ ထို့ကြောင့် ဗဟိုအရ ခေါက်ချိုးညီသော စက်ဝိုင်း၏ ခေါက်ချိုးညီပုံသည် ယင်းစက်ဝိုင်းကိုယ်တိုင် ဖြစ်သည်။ ဗဟိုမှတ် O သည် စက်ဝိုင်း၏ ခေါက်ချိုးညီဗဟို ဖြစ်သည်။

၄.၂.၅ စတုရန်း

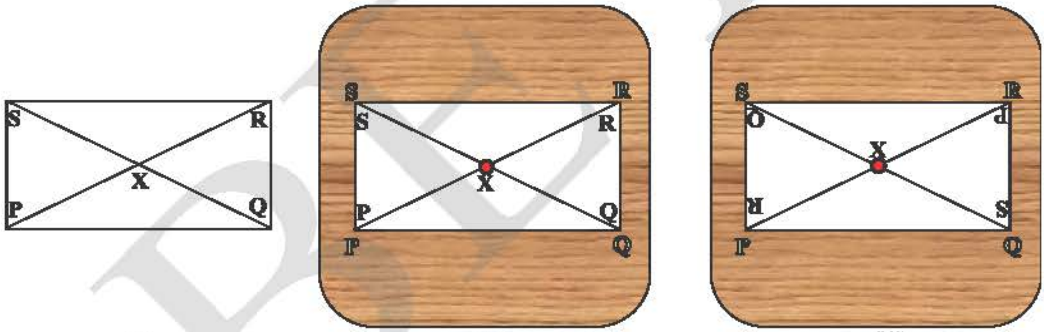


ပုံ ၄.၉

စတုရန်းတစ်ခုသည် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းများအရ ခေါက်ချိုးညီကြောင်း သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ယခုစတုရန်း ABCD သည် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC နှင့် BD တို့၏ ဖြတ်မှတ် O အရလည်း ခေါက်ချိုးညီကြောင်း တွေ့ရမည်။ O သည် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC နှင့် BD တို့ကို ထက်ဝက်ပိုင်းဖြတ်သောကြောင့် A နှင့် C၊ B နှင့် D တို့သည် အမှတ် O အရခေါက်ချိုးညီကြသည်။ တစ်ဖန် ဖြတ်မှတ် O ကိုပတ်၍ 180° လှည့်ခြင်းဖြင့် A သည် ယင်း၏ခေါက်ချိုးညီအမှတ် C နှင့်လည်းကောင်း၊ B သည် ယင်း၏ခေါက်ချိုးညီအမှတ် D နှင့်လည်းကောင်း ထပ်တူကျနေကြောင်း တွေ့ရသည်။ စတုရန်း ABCD ၏ ထိပ်စွန်းမှတ်များသည် ဖြတ်မှတ် O အရယင်းတို့၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်များနှင့် နေရာဖလှယ်သည်မှအပ မူလပုံနှင့်ထပ်တူကျနေသည်။ ထို့ကြောင့် O အရ စတုရန်း၏ ခေါက်ချိုးညီပုံသည် ယင်းစတုရန်းကိုယ်တိုင် ဖြစ်သည်။ ဖြတ်မှတ် O သည် စတုရန်း၏ ခေါက်ချိုးညီဗဟိုဖြစ်သည်။

၄.၂.၆ ထောင့်မှန်စတုဂံ

ထောင့်မှန်စတုဂံသည် အလယ်မျဉ်းများအရ ခေါက်ချိုးညီသော်လည်း ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းများအရ ခေါက်ချိုးမညီကြောင်းသိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ဆက်လက်၍ထောင့်မှန်စတုဂံတွင် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းတို့၏ ဖြတ်မှတ်၌ အမှတ်အရ ခေါက်ချိုးညီကြောင်းကို လက်တွေ့ပြုလုပ်လေ့လာကြမည်။



(i) (ii) (iii)

ပုံ ၄.၁၀

အဆင့် (၁) ကတ်ပြားတစ်ခုပေါ်တွင် ထောင့်မှန်စတုဂံ PQRS ကိုဆွဲ၍ ကတ်ကြေးဖြင့်ဖြတ်ပါ။

အဆင့် (၂) ထိုထောင့်မှန်စတုဂံ၏ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း PR နှင့် QS တို့၏ ဖြတ်မှတ်သည် X ဖြစ်ပါစေ။ (ပုံ ၄.၁၀ (i) ကို ကြည့်ပါ။)

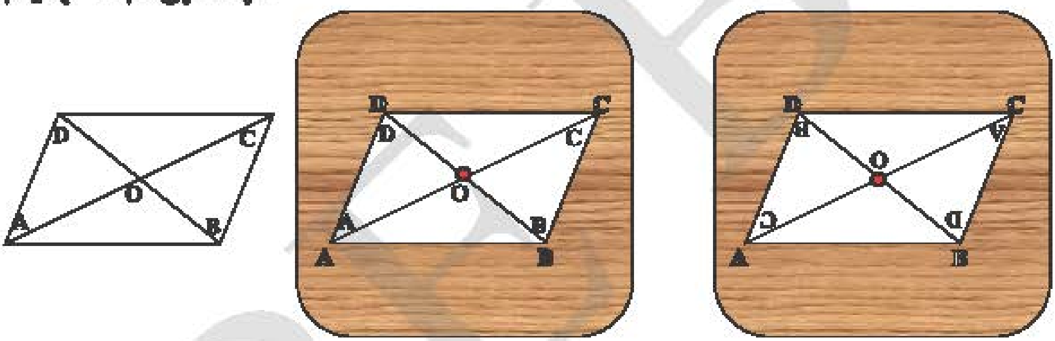
အဆင့် (၃) ပင်အပ်တစ်ချောင်းကို ဖြတ်မှတ် X ၌ စိုက်ပါ။ ထောင့်မှန်စတုဂံ၏ ထိပ်စွန်းမှတ်များဖြစ်သော P, Q, R နှင့် S တို့ကို စားပွဲမျက်နှာပြင်ပေါ်နှင့် ကတ်ပြားပေါ်တို့တွင် အသီးသီးနေရာမှတ်သားထားပါ။ (ပုံ ၄.၁၀ (ii) ကို ကြည့်ပါ။)

အဆင့် (၄) ထောင့်မှန်စတုဂံမျက်နှာပြင်၏ အနားစောင်းမျဉ်းများတစ်လျှောက် ခဲတံ သို့မဟုတ် မြေဖြူဖြင့် ဆွဲသားပါ။

အဆင့် (၅) ထို့နောက် X ကိုပတ်၍ ထောင့်မှန်စတုဂံပုံကို 180° လှည့်ပါ။ (ပုံ ၄.၁၀ (iii) ကို ကြည့်ပါ။)

အထက်ပါ လက်တွေ့လုပ်ဆောင်ချက်အရ စားပွဲမျက်နှာပြင်ပေါ်ရှိ P, Q, R, S နေရာများသည် တတ်ပြားပေါ်ရှိ R, S, P, Q တို့နှင့် ထပ်တူကျနေသည်ကို တွေ့ရမည်။ ထောင့်မှန်စတုဂံ၏ ထိပ်စွန်းမှတ်များသည် ဖြတ်မှတ် X အရ ယင်းတို့၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ်များနှင့် နေရာလှယ်သည်မှအပ မူလပုံနှင့်ထပ်တူကျနေသည်။ ထို့ကြောင့် ဖြတ်မှတ် X သည် ထောင့်မှန်စတုဂံ၏ ခေါက်ချိုးညီဗဟို ဖြစ်သည်။

၄.၂.၇ အနားပြိုင်စတုဂံ



(i) (ii) (iii)

ပုံ ၄.၁၁

အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD တွင် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း AC နှင့် BD တို့၏ ဖြတ်မှတ်သည် O ဖြစ်သည်။ (ပုံ ၄.၁၁ ကိုကြည့်ပါ။) ထောင့်မှန်စတုဂံ PQRS ကို လက်တွေ့လုပ်ဆောင်ခဲ့သည့်အတိုင်း အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD တွင်လုပ်ဆောင်ကြည့်ကြလျှင် အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD သည် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းများ၏ ဖြတ်မှတ် O အရ ခေါက်ချိုးညီကြောင်း တွေ့ရမည်။

ဗဟိုခေါက်ချိုးညီခြင်း ဖြစ်စေသည့် ဂျီဩမေတြီပုံများ၏ ခေါက်ချိုးညီဗဟိုသည်

- စက်ဝိုင်းတွင် စက်ဝိုင်း၏ ဗဟိုမှတ် ဖြစ်သည်။
- စတုရန်း၊ ထောင့်မှန်စတုဂံနှင့် အနားပြိုင်စတုဂံတို့တွင် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းများ၏ ဖြတ်မှတ် ဖြစ်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၄.၁

၁။ မျဉ်းတစ်ကြောင်း ℓ ကိုဆွဲ၍ ထိုမျဉ်း၏ကြိုက်နှစ်သက်ရာတစ်ဖက်တွင် မျဉ်းပြင်ပရှိ အမှတ် P ကိုနေရာချမည်။ မျဉ်း ℓ အရ P ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ် Q ကိုနေရာချပါ။ ထို့နောက် မျဉ်း ℓ ပေါ်ရှိ ကြိုက်နှစ်သက်ရာနေရာတွင် အမှတ် R ကိုယူပါ။ P နှင့် R၊ Q နှင့် R တို့ကို ဆက်ပြီး PR နှင့် QR တို့ကို တိုင်းကြည့်ပါက မည်သို့တွေ့ရှိရသနည်း။ ℓ ပေါ်တွင် R ကို နေရာအမျိုးမျိုး ပြောင်းယူလျက် အထက်ပါအတိုင်း လုပ်ဆောင်ကြည့်ပါက မည်သို့တွေ့ရှိရသနည်း။

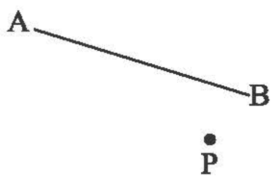
၂။ X နှင့် Y အမှတ်နှစ်မှတ်ရှိရာ Y အမှတ်အရ ခေါက်ချိုးညီသည့် X ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ် Z ကိုဆွဲပါ။ အမှတ် X နှင့် Z အရ Y ကို မည်သို့ခေါ်ဆိုနိုင်သနည်း။

၃။ မျဉ်းပိုင်း AB ကိုဆွဲ၍ ထိုမျဉ်းပေါ်တွင် မကျရောက်သော အမှတ်တစ်မှတ် K ကိုယူပါ။ K အမှတ်အရ မျဉ်းပိုင်း AB ၏ ခေါက်ချိုးညီမျဉ်းပိုင်း CD ကိုဆွဲပါ။ CD ပေါ်တွင် နှစ်သက်ရာ နေရာ၌ M အမှတ်ကိုယူပါ။ K အရ အမှတ် M ၏ ခေါက်ချိုးညီအမှတ် N ကိုဆွဲပါ။ N ကို မည်သည့်နေရာတွင် တွေ့ရသနည်း။

၄။ A ကိုဗဟိုပြု၍ အချင်းဝက် 2cm ရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ဆွဲသားပါ။ စက်ဝိုင်း ပြင်ပ၌ အမှတ်တစ်မှတ် P ကိုယူပါ။ ထိုစက်ဝိုင်း၏ အမှတ် P အရ ခေါက်ချိုးညီသည့်ပုံကို ဆွဲပါ။

၅။ ထောင့်မှန်စတုဂံ ABCD ကိုဆွဲ၍ ထိုပုံပြင်ပ၌ X အမှတ်တစ်မှတ်ယူပါ။ ထောင့်မှန်စတုဂံ ABCD ၏ အမှတ် X အရ ခေါက်ချိုးညီပုံ A′B′C′D′ကိုဆွဲပါ။ ထောင့်မှန်စတုဂံ A′B′C′D′ ရှိ ခေါက်ချိုးညီဗဟို O′ ကို ပုံတွင်ဖော်ပြပါ။

၆။ ပုံတွင်ပြထားသည့်အတိုင်း အမှတ် P အရ မျဉ်းပိုင်း AB ၏ ခေါက်ချိုးညီမျဉ်း CD ကို တည်ဆောက်ပါ။ P ကိုဖြတ်၍ AB နှင့်မပြိုင်သောမျဉ်းတစ်ကြောင်းဆွဲပါ။ ထိုမျဉ်းဆီသို့ AB နှင့် CD ကို ဆက်ဆွဲပါ။ ထိုမျဉ်းနှင့် ဆက်ဆွဲမျဉ်းများ၏ ဖြတ်မှတ်ကို M နှင့် N ဟုထားပါ။ PM = PN ဖြစ်ပါသလား။

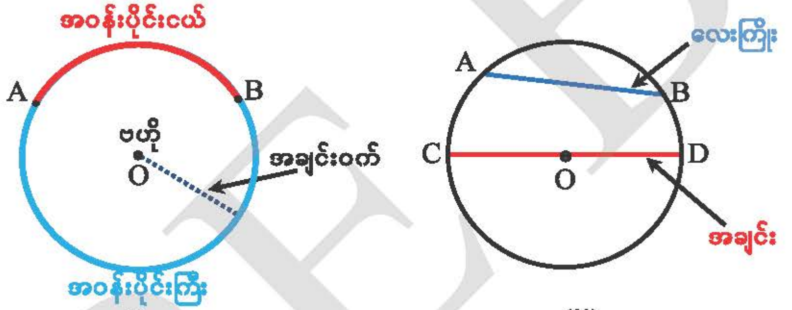


အခန်း ၅ စက်ဝိုင်း

စက်ဝိုင်း၏အခြေခံအချက်အလက်များနှင့် စက်ဝိုင်းပုံနယ်၏အစိတ်အပိုင်းများကို သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ဤသင်ခန်းစာတွင် ဗဟိုမှလေးကြိုးပေါ်သို့ဆွဲသော ထောင့်မတ်မျဉ်း၊ ဗဟိုမှတူညီစွာကွာဝေးသောလေးကြိုးများ၊ စက်ဝိုင်းတစ်ခု၏ဗဟို၌ အဝန်းပိုင်းတစ်ခုက ခံဆောင်သောထောင့်နှင့် စက်ဝိုင်းတစ်ခု၏စက်ဝိုင်းပြတ်တစ်ခုတည်းအတွင်းရှိထောင့်များ စသည်တို့ကို လေ့လာမည်ဖြစ်သည်။ ဤသင်ခန်းစာကို သင်ယူပြီးပါက စက်ဝိုင်း၏ဂုဏ်သတ္တိများကို အသုံးပြု၍ ပုစ္ဆာများ ဖြေရှင်းတတ်မည်။

၅.၁ စက်ဝိုင်း၏အစိတ်အပိုင်းများကိုပြန်လည်လေ့လာခြင်း

စက်ဝိုင်းတစ်ခု၏ ဗဟို၊ အချင်းဝက်၊ အချင်း၊ လေးကြိုးနှင့် အဝန်းပိုင်းများအကြောင်းကို သိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။



(i)　　(ii)

ပုံ ၅.၁

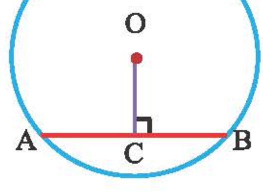
၅.၂ ဗဟိုမှလေးကြိုးတစ်ကြောင်းပေါ်သို့ဆွဲသောထောင့်မတ်မျဉ်း

စက်ဝိုင်းတစ်ခုတွင် လေးကြိုးတစ်ကြောင်းပေါ်သို့ ဗဟိုမှ ထောင့်မတ်မျဉ်းတစ်ကြောင်း ရေးဆွဲနိုင်သည်။ ယခု ထိုထောင့်မတ်မျဉ်းနှင့် လေးကြိုးတို့၏ ဂုဏ်သတ္တိများအကြောင်းကို လေ့လာကြမည်။

စမ်းသပ်ချက် ၁။

အဆင့် (၁) O ဗဟိုရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို သင့်လျော်သော အချင်းဝက်ဖြင့် ဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) လေးကြိုး AB ကို ဆွဲပါ။



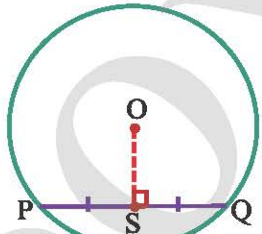
ပုံ ၅.၂

အဆင့် (၃) ဗဟို O မှ လေးကြိုး AB ပေါ်သို့ ထောင့်မတ်ကျမျဉ်း OC ကို ဆွဲပါ။ ဖြစ်ပေါ်လာသော မျဉ်းပိုင်း AC နှင့် CB ကို တိုင်းကြည့်ပါ။ AC = CB ဖြစ်ကြောင်း တွေ့ရှိရမည်။ (ပုံ ၅.၂ ကိုကြည့်ပါ။)

ဤနည်းအတိုင်း သင့်လျော်သော အချင်းဝက်များဖြင့် စက်ဝိုင်းများဆွဲပြီး စမ်းသပ်ကြည့်ပါက ဗဟိုမှ လေးကြိုးအသီးသီးပေါ်သို့ဆွဲသော ထောင့်မတ်မျဉ်းများသည် ထိုလေးကြိုးကို နှစ်ပိုင်းအညီပိုင်းကြောင်း တွေ့ရမည်။

စမ်းသပ်ချက် ၂။

အဆင့် (၁) သင့်လျော်သော အချင်းဝက်ဖြင့်ဆွဲထားသော O ဗဟိုရှိ စက်ဝိုင်းတစ်ခုတွင် လေးကြိုးတစ်ခု PQ ကို ဆွဲပါ။



ပုံ ၅.၃

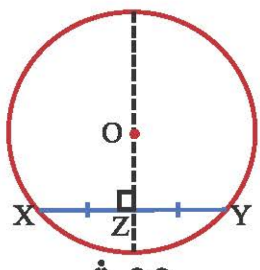
အဆင့် (၂) PQ ပေါ်တွင် ထက်ဝက်ပိုင်းအမှတ် S ကို မှတ်သားပါ။

အဆင့် (၃) အမှတ် S နှင့် ဗဟို O ကို ဆက်ပါ။ OS $\perp$ PQ ဖြစ်ကြောင်း တွေ့ရမည်။ (ပုံ ၅.၃ ကို ကြည့်ပါ။)

ဤနည်းအတိုင်း သင့်လျော်သော အချင်းဝက်များဖြင့် စက်ဝိုင်းများဆွဲပြီး စမ်းသပ်ကြည့်ပါက ဗဟိုမှ လေးကြိုးအသီးသီးပေါ်သို့ဆွဲသော ထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းများသည် ထိုလေးကြိုးကို ထောင့်မတ်ကျကြောင်း တွေ့ရမည်။

စမ်းသပ်ချက် ၃။

အဆင့် (၁) O ဗဟိုရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို သင့်လျော်သော အချင်းဝက်ဖြင့် ဆွဲပါ။



ပုံ ၅.၄

အဆင့် (၂) လေးကြိုး XY ကို ဆွဲပါ။

အဆင့် (၃) လေးကြိုး XY တွင် ထက်ဝက်ပိုင်းထောင့်မတ်မျဉ်းတစ်ကြောင်းကို ဆွဲပါ။ ထိုမျဉ်းသည် ဗဟို O ကို ဖြတ်သွားကြောင်း တွေ့ရသည်။ (ပုံ ၅.၄ ကို ကြည့်ပါ။)

ဤနည်းအတိုင်း သင့်လျော်သော အချင်းဝက်များဖြင့် စက်ဝိုင်းများဆွဲပြီး စမ်းသပ်ကြည့်ပါက ဗဟိုမှ လေးကြိုးအသီးသီးပေါ်သို့ဆွဲသော ထက်ဝက်ပိုင်းထောင့်မတ်မျဉ်းများသည် စက်ဝိုင်း၏ဗဟိုကို ဖြတ်သွားကြောင်း တွေ့ရမည်။

ဤစမ်းသပ်ချက်အတိုင်း အချင်းဝက်အမျိုးမျိုးရှိသော စက်ဝိုင်းများတွင် လေးကြိုးများကို ထက်ဝက်ပိုင်းသော ထောင့်မတ်မျဉ်းများဆွဲပါက ထိုထောင့်မတ်မျဉ်းအသီးသီးသည် စက်ဝိုင်း၏ဗဟိုကို ဖြတ်သွားကြကြောင်း တွေ့ရှိရမည်ဖြစ်သည်။

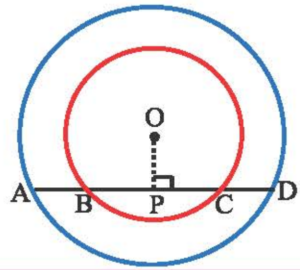
- စက်ဝိုင်းတစ်ခု၏ဗဟိုမှ လေးကြိုးတစ်ကြောင်းပေါ်သို့ဆွဲသော ထောင့်မတ်မျဉ်းသည် ထိုလေးကြိုးကို ထက်ဝက်ပိုင်းသည်။
- စက်ဝိုင်းတစ်ခု၏ဗဟိုမှ လေးကြိုးတစ်ကြောင်းပေါ်သို့ဆွဲသော ထက်ဝက်ပိုင်းမျဉ်းသည် ထိုလေးကြိုးကို ထောင့်မတ်ကျသည်။
- စက်ဝိုင်းတစ်ခုတွင် လေးကြိုးတစ်ကြောင်း၏ ထက်ဝက်ပိုင်းထောင့်မတ်မျဉ်းသည် ဗဟိုကိုဖြတ်သွားသည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၁

၁။ အချင်းမျဉ်းအလျား 8 cm ရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို ဆွဲပါ။ အလျား 6 cm ရှိသော လေးကြိုးတစ်ကြောင်း AB ကို ဆွဲပါ။ ထိုစက်ဝိုင်း၏ဗဟို O မှ လေးကြိုးပေါ်သို့ ထောင့်မတ်မျဉ်း ON ကို ဆွဲပါ။ AN နှင့် NB တို့၏အလျားကို တိုင်းပါ။ AN = NB ဖြစ်ပါသလား။

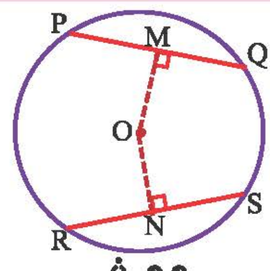
၂။ အချင်းဝက်အလျား 5 cm ရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို ဆွဲပါ။ အလျား 7 cm ရှိသော လေးကြိုးတစ်ကြောင်း PQ ကို ဆွဲပါ။ PQ ၏အလယ်အမှတ် R ၌ ထောင့်မတ်ကျသောမျဉ်းကို ဆွဲပါ။ လေးကြိုး PQ ၏ ထက်ဝက်ပိုင်းထောင့်မတ်ကျမျဉ်းအကြောင်းကို သင်သိသမျှရေးပါ။

၃။ ပုံတွင် ဗဟိုတူစက်ဝိုင်းနှစ်ခု၏ဗဟိုသည် O ဖြစ်ပြီး $OP \perp AD$ တွင် $AP = 4$ cm နှင့် $PC = 1.5$ cm ဖြစ်လျှင် AB ၏ အလျားကို ရှာပါ။



၅.၃ ဗဟိုမှတူညီစွာကွာဝေးသောလေးကြိုးများ

စမ်းသပ်ချက် ၁။



ပုံ ၅.၅

အဆင့် (၁) O ဗဟိုရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို သင့်လျော်သော အချင်းဝက်ဖြင့် ဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) အလျားတူညီသော လေးကြိုး PQ နှင့် RS ကို ဆွဲပါ။

အဆင့် (၃) $OM \perp PQ$ နှင့် $ON \perp RS$ တို့ကို ဆွဲပါ။

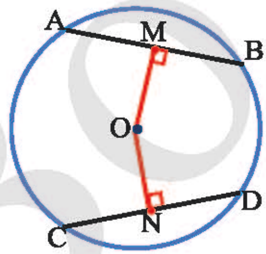
အဆင့် (၄) OM နှင့် ON တို့ကိုတိုင်းပါ။ $OM = ON$ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။(ပုံ ၅.၅ ကိုကြည့်ပါ။)

ဤနည်းအတိုင်း သင့်လျော်သော အချင်းဝက်များဖြင့် စက်ဝိုင်းများဆွဲပြီး စမ်းသပ်ကြည့်ပါက စက်ဝိုင်းတစ်ခုအတွင်းရှိ အလျားတူညီသော လေးကြိုးနှစ်ကြောင်းသည် ဗဟိုမှတူညီစွာ ကွာဝေးကြောင်း တွေ့ရသည်။

စမ်းသပ်ချက် ၂။

အဆင့် (၁) O ဗဟိုရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို သင့်လျော်သော အချင်းဝက်ဖြင့် ဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) အချင်းဝက်နှစ်ခုကို ဆွဲပါ။ ထိုအချင်းဝက်များတွင် $OM = ON$ ဖြစ်စေမည့် အမှတ်နှစ်ခု M နှင့် N ကို ယူပါ။



ပုံ ၅.၆

အဆင့် (၃) OMကို Mၖ ထောင့်မတ်ကျသော လေးကြိုး AB နှင့် ONကို Nၖ ထောင့်မတ်ကျသော လေးကြိုး CD ကို ဆွဲပါ။

အဆင့် (၄) AB နှင့် CD တို့ကိုတိုင်းပါ။ $AB = CD$ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။(ပုံ ၅.၆ ကိုကြည့်ပါ။)

ဤနည်းအတိုင်း သင့်လျော်သော အချင်းဝက်များဖြင့် စက်ဝိုင်းများဆွဲပြီး စမ်းသပ်ကြည့်ပါက စက်ဝိုင်းတစ်ခုအတွင်းရှိ ဗဟိုမှတူညီစွာကွာဝေးသော လေးကြိုးနှစ်ကြောင်းသည် အလျားများ တူညီကြောင်း တွေ့ရသည်။

- အလျားတူညီသော လေးကြိုးနှစ်ကြောင်းသည် ဗဟိုမှတူညီစွာ ကွာဝေးကြသည်။
- ဗဟိုမှတူညီစွာကွာဝေးသော လေးကြိုးနှစ်ကြောင်းသည် အလျားများ တူညီကြသည်။

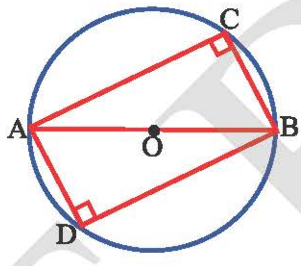
လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၂

၁။ အချင်းဝက်အလျား 5 cm ရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို ဆွဲပါ။ အလျား 8 cm ရှိသော လေးကြိုးနှစ်ကြောင်း PQ နှင့် RS တို့ကို ဆွဲပါ။ ထိုလေးကြိုးနှစ်ကြောင်းသို့ ဗဟိုမှ ထောင့်မတ်ကျအကွာအဝေးအသီးသီးကို တိုင်းပါ။ ထိုအကွာအဝေးနှစ်ခု တူညီပါသလား။

၂။ အချင်းဝက် 5 cm ရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို ဆွဲပါ။ ဗဟိုမှ 4 cm အကွာ၌ အမှတ် N ရှိသည်။ N သည် လေးကြိုး AB ၏အလယ်အမှတ်ဖြစ်လျှင် AB ၏အလျားကို တိုင်းပါ။

၃။ O နှင့် P ၌ ဗဟိုရှိပြီး အချင်းဝက် 5 cm စီရှိသော စက်ဝိုင်းနှစ်ခုကို ဆွဲပါ။ ဗဟို O ရှိသော စက်ဝိုင်းတွင် 6 cm ရှိသောလေးကြိုး AB နှင့် ဗဟို P ရှိသော စက်ဝိုင်းတွင် 6 cm ရှိသော လေးကြိုး CD ကိုဆွဲပါ။ OM $\perp$ AB နှင့် PM $\perp$ CD တို့ကို ဆွဲပါ။ OM နှင့် PM တို့ကို တိုင်းပါ။ OM = PM ဖြစ်ပါသလား။

၅.၄ စက်ဝိုင်းခြမ်းတစ်ခုအတွင်းရှိထောင့်



ပုံ ၅.၇

ပုံ ၅.၇ တွင် ဗဟို O ရှိ စက်ဝိုင်း၌ AB သည် အချင်းဖြစ်ပြီး စက်ဝန်းပေါ်တွင် အမှတ်တစ်ခု C ကို ယူထားသည်။ AC နှင့် BC သည် ထိုစက်ဝိုင်း၏လေးကြိုးများ ဖြစ်ကြသည်။ အဝန်းပိုင်း ACB သည် စက်ဝိုင်းခြမ်းတစ်ခုဖြစ်သောကြောင့် ရရှိလာသော $\angle$ACB ကို **စက်ဝိုင်းခြမ်းအတွင်းရှိထောင့်** (angle in a semicircle) ဟုခေါ်သည်။ $\angle$ACB ကို တိုင်းတာကြည့်ပါက 90°(ထောင့်မှန်တစ်ခု) ရှိကြောင်း တွေ့ရမည်။ စက်ဝန်းပေါ်တွင် အခြားအမှတ် D ကိုယူ၍ $\angle$ADB ကို တိုင်းကြည့်လျှင်လည်း 90° ရှိကြောင်း တွေ့ရသည်။

ဤနည်းအတိုင်း အချင်းဝက်အမျိုးမျိုးရှိသော စက်ဝိုင်းများဆွဲသားပြီး စက်ဝိုင်းခြမ်းအတွင်းရှိ ထောင့်များကို တိုင်းတာကြည့်လျှင် ထောင့်မှန်တစ်ခုဖြစ်ကြောင်း တွေ့နိုင်သည်။

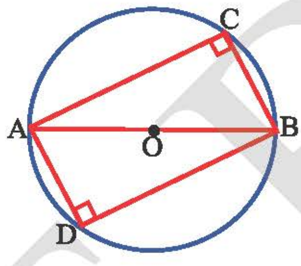
စက်ဝိုင်းခြမ်းတစ်ခုအတွင်းရှိ ထောင့်တစ်ထောင့်သည် ထောင့်မှန်တစ်ခု ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ။ ဗဟို O ရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုတွင် AB သည် အချင်းဖြစ်သည်။ C သည် ယင်း စက်ဝိုင်းပေါ်ရှိ အမှတ်တစ်ခု ဖြစ်သည်။ AC = BC ဖြစ်လျှင် $\angle$BAC နှင့် $\angle$ABC ၏တန်ဖိုးတို့ကို ရှာပါ။

၂။ အချင်းဝက် 5 cm ရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို ဆွဲပါ။ ဗဟိုမှ 4 cm အကွာ၌ အမှတ် N ရှိသည်။ N သည် လေးကြိုး AB ၏အလယ်အမှတ်ဖြစ်လျှင် AB ၏အလျားကို တိုင်းပါ။

၃။ O နှင့် P ၌ ဗဟိုရှိပြီး အချင်းဝက် 5 cm စီရှိသော စက်ဝိုင်းနှစ်ခုကို ဆွဲပါ။ ဗဟို O ရှိသော စက်ဝိုင်းတွင် 6 cm ရှိသောလေးကြိုး AB နှင့် ဗဟို P ရှိသော စက်ဝိုင်းတွင် 6 cm ရှိသော လေးကြိုး CD ကိုဆွဲပါ။ $OM \perp AB$ နှင့် $PM \perp CD$ တို့ကို ဆွဲပါ။ OM နှင့် PM တို့ကို တိုင်းပါ။ $OM = PM$ ဖြစ်ပါသလား။

၅.၄ စက်ဝိုင်းခြမ်းတစ်ခုအတွင်းရှိထောင့်



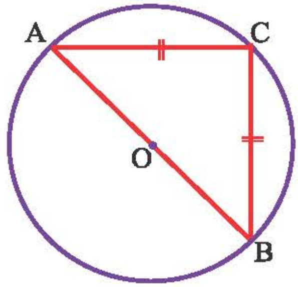
ပုံ ၅.၇

ပုံ ၅.၇ တွင် ဗဟို O ရှိ စက်ဝိုင်း၌ AB သည် အချင်းဖြစ်ပြီး စက်ဝန်းပေါ်တွင် အမှတ်တစ်ခု C ကို ယူထားသည်။ AC နှင့် BC သည် ထိုစက်ဝိုင်း၏လေးကြိုးများ ဖြစ်ကြသည်။ အဝန်းပိုင်း ACB သည် စက်ဝိုင်းခြမ်းတစ်ခုဖြစ်သောကြောင့် ရရှိလာသော $\angle ACB$ ကို **စက်ဝိုင်းခြမ်းအတွင်းရှိထောင့်** (angle in a semicircle) ဟုခေါ်သည်။ $\angle ACB$ ကို တိုင်းတာကြည့်ပါက $90°$(ထောင့်မှန်တစ်ခု) ရှိကြောင်း တွေ့ရမည်။ စက်ဝန်းပေါ်တွင် အခြားအမှတ် D ကိုယူ၍ $\angle ADB$ ကို တိုင်းကြည့်လျှင်လည်း $90°$ ရှိကြောင်း တွေ့ရသည်။

ဤနည်းအတိုင်း အချင်းဝက်အမျိုးမျိုးရှိသော စက်ဝိုင်းများဆွဲသားပြီး စက်ဝိုင်းခြမ်းအတွင်းရှိ ထောင့်များကို တိုင်းတာကြည့်လျှင် ထောင့်မှန်တစ်ခုဖြစ်ကြောင်း တွေ့နိုင်သည်။

စက်ဝိုင်းခြမ်းတစ်ခုအတွင်းရှိ ထောင့်တစ်ထောင့်သည် ထောင့်မှန်တစ်ခု ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ။ ဗဟို O ရှိသော စက်ဝိုင်းတစ်ခုတွင် AB သည် အချင်းဖြစ်သည်။ C သည် ယင်း စက်ဝိုင်းပေါ်ရှိ အမှတ်တစ်ခု ဖြစ်သည်။ $AC = BC$ ဖြစ်လျှင် $\angle BAC$ နှင့် $\angle ABC$ ၏တန်ဖိုးတို့ကို ရှာပါ။



AB သည် အချင်းဖြစ်ပြီး ∠ACB သည် စက်ဝိုင်းခြမ်းအတွင်းရှိထောင့် ဖြစ်သည်။

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ$$

$$\angle BAC = \angle ABC \quad (\because AC = BC)$$

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$$ (တြိဂံ၏ အတွင်းထောင့်များပေါင်းလဒ်)

$$\angle ABC + \angle ABC + 90^\circ = 180^\circ$$

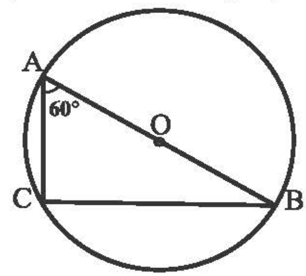
$$2\angle ABC = 90^\circ$$

$$\angle ABC = 45^\circ$$

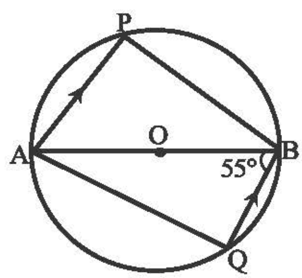
$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = 45^\circ$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၃

၁။ အချင်း PQ = 7 cm အလျားရှိ စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို ဆွဲပါ။ စက်ဝိုင်းပေါ်တွင် ကြိုက်ရာ အမှတ်တစ်ခုကို R ဟုယူပါ။ PR နှင့် QR ကို ဆက်ပါ။ ထို့နောက် ∠PRQ ကို တိုင်းပါ။ ∠PRQ သည် ထောင့်မှန်တစ်ခုဖြစ်ပါသလား။

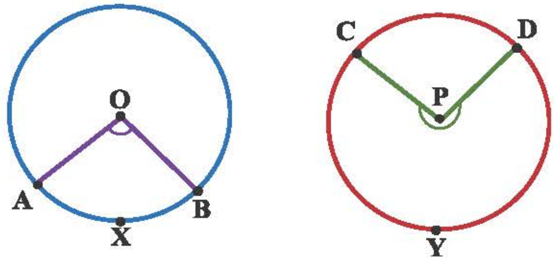


၂။ ပုံတွင် AB သည် O ဗဟိုရှိ စက်ဝိုင်း၏အချင်းဖြစ်လျှင် ∠ABC ၏တန်ဖိုးကို ရှာပါ။



၃။ ပုံတွင် AB သည် စက်ဝိုင်း၏ အချင်းဖြစ်ပြီး AP // QB ဖြစ်သည်။ ∠ABQ = 55° ဖြစ်လျှင် ∠QAB နှင့် ∠PBA တို့ကို ရှာပါ။

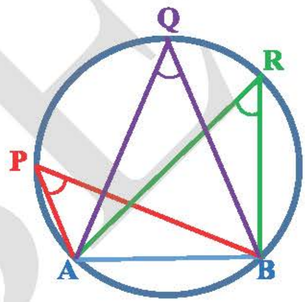
၅.၅ စက်ဝိုင်းတစ်ခု၏ ဗဟို၌အဝန်းပိုင်းတစ်ခုကခံဆောင်ထားသောထောင့်



(i) (ii)

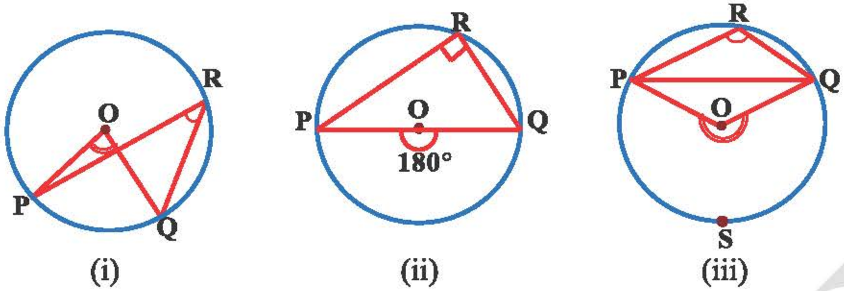
ပုံ ၅.၈

စက်ဝိုင်းတစ်ခုတွင် အဝန်းပိုင်းတစ်ခုက **ဗဟို၌ခံဆောင်ထားသောထောင့်** (central angle) ဆိုသည်မှာ စက်ဝန်းပိုင်းတစ်ခု၏ အစွန်းနှစ်ဖက်ရှိအမှတ်များနှင့် ဗဟိုကိုဆက်သော အချင်းဝက်မျဉ်းနှစ်ကြောင်းတို့ကြားရှိ ထောင့်ကိုဆိုလိုသည်။ ပုံ ၅.၈ (i) တွင် $\angle AOB$ သည် အဝန်းပိုင်း AXB ၏ ဗဟို၌ ခံဆောင်သောထောင့်ဖြစ်ပြီး ပုံ ၅.၈ (ii) တွင်ထောင့်ပြန် CPD သည် အဝန်းပိုင်းကြီး CYD က ဗဟို၌ ခံဆောင်ထားသောထောင့်ဖြစ်သည်။



ပုံ ၅.၉

ပုံ ၅.၉ တွင် P၊ Q နှင့် R တို့သည် အဝန်းပိုင်းကြီး APQRB ပေါ်ရှိ အမှတ်များဖြစ်သည်။ $\angle APB$ ၊ $\angle AQB$ နှင့် $\angle ARB$ တို့ကို အဝန်းပိုင်း AB က ခံဆောင်သောထောင့်များ သို့မဟုတ် လေးကြိုး AB က ခံဆောင်သောထောင့်များဟုခေါ်သည်။ ထိုထောင့်များကို **စက်ဝိုင်းပြွတ်တစ်ခုတည်းအတွင်းရှိ ထောင့်များ** (inscribed angles) ဟုလည်းခေါ်သည်။



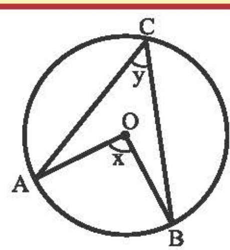
ပုံ ၅.၁၀

ပုံ ၅.၁၀ (i) ကဲ့သို့ ဗဟို O ရှိ စက်ဝိုင်းတစ်ခုကို ဆွဲပါ။ $\angle PRQ$ သည် အဝန်းပိုင်းငယ် PQ က ကျန်အဝန်းပေါ်တွင် ခံဆောင်ထားသောထောင့်ဖြစ်ပြီး $\angle POQ$ သည် အဝန်းပိုင်းငယ် PQ က ဗဟို၌ ခံဆောင်ထားသောထောင့် ဖြစ်သည်။ $\angle POQ$ နှင့် $\angle PRQ$ တို့ကို တိုင်းတာကြည့်ပါက $\angle POQ$ သည် $\angle PRQ$ ၏ နှစ်ဆဖြစ်ကြောင်း တွေ့ရသည်။

ပုံ ၅.၁၀ (ii) တွင် $\angle PRQ$ သည် စက်ဝိုင်းခြမ်းတစ်ခုအတွင်းရှိ ထောင့်ဖြစ်၍ $\angle PRQ = 90°$ ဖြစ်သည်။ ထောင့်ဖြောင့် $POQ = 180°$ ဖြစ်၍ $\angle POQ = 2\angle PRQ$ ဖြစ်သည်။

ပုံ ၅.၁၀ (iii) တွင် $\angle PRQ$ သည် အဝန်းပိုင်းကြီး PSQ ကကျန်အဝန်းပေါ်တွင်ခံဆောင်ထားသောထောင့်ဖြစ်ပြီး ထောင့်ပြန် POQ သည် အဝန်းပိုင်းကြီး PSQ ကဗဟို၌ခံဆောင်ထားသောထောင့် ဖြစ်သည်။ ယင်းထောင့်များကို တိုင်းကြည့်ပါက $\angle POQ = 2\angle PRQ$ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့နိုင်သည်။ အခြားသောစက်ဝိုင်းများ ဆွဲသား၍ အထက်ပါအတိုင်း စမ်းသပ်ကြည့်ပါက အောက်ပါရလဒ်ကို ရရှိမည်။

> စက်ဝိုင်းတစ်ခုတွင် အဝန်းပိုင်းတစ်ခုက ဗဟို၌ ခံဆောင်ထားသောထောင့်သည် ယင်းအဝန်းပိုင်းက ကျန်အဝန်းပိုင်းပေါ်ရှိ အမှတ်တစ်ခု၌ ခံဆောင်ထားသော ထောင့်၏နှစ်ဆရှိသည်။



ပုံစံတွက် ။ ပေးထားသောပုံ၌ O ဗဟိုရှိစက်ဝိုင်းတွင်

(က) $x = 120°$ ဖြစ်လျှင် y ကို ရှာပါ။

(ခ) $y = 35°$ ဖြစ်လျှင် x ကိုရှာပါ။

O ဗဟိုရှိစက်ဝိုင်းတွင်

(က) $x = 2y$ (ဗဟို၌ ခံဆောင်သောထောင့်သည် အဝန်းပိုင်း၌ ခံဆောင်သော ထောင့်၏နှစ်ဆ)

$120° = 2y$

$\therefore y = 60°$

(ခ) $x = 2y$ (ဗဟို၌ ခံဆောင်သောထောင့်သည် အဝန်းပိုင်း၌ ခံဆောင်သော ထောင့်၏နှစ်ဆ)

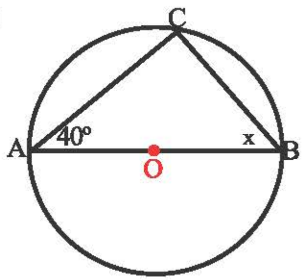
$x = 2 \times 35°$

$\therefore x = 70°$

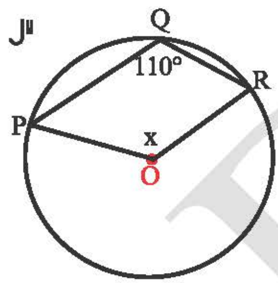
လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၄

အောက်ပါ O ဗဟိုရှိ စက်ဝိုင်းများတွင် a, b, c, d နှင့် x, y တို့၏ တန်ဖိုးများကို ရှာပါ။

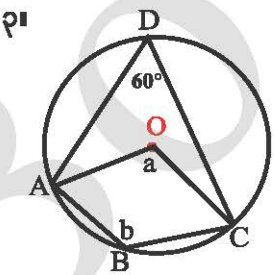
၁။



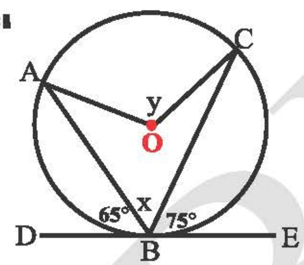
၂။



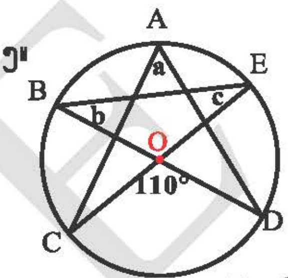
၃။



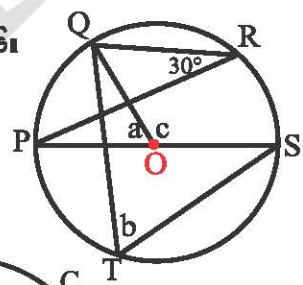
၄။

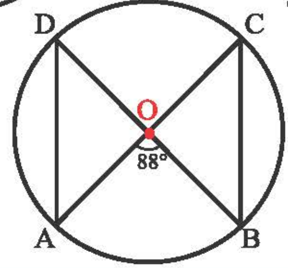


၅။



၆။

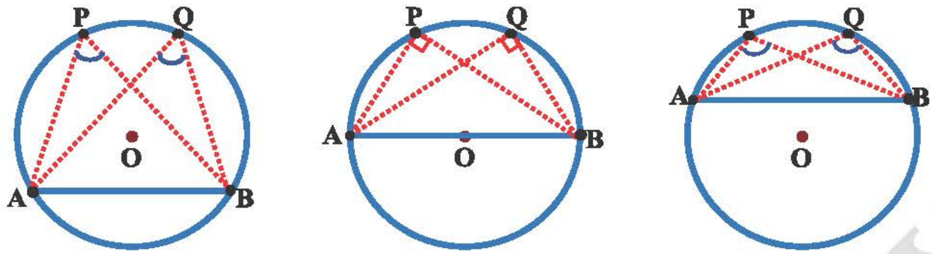




၇။ ပုံတွင် ∠ADB နှင့် ∠ACB တို့ကို ရှာပါ။

၅.၆ စက်ဝိုင်းတစ်ခု၏ စက်ဝိုင်းပြတ်တစ်ခုတည်းအတွင်းရှိထောင့်များ

ပုံ ၅.၁၁ (i) တွင် AB သည် O ဗဟိုရှိ စက်ဝိုင်း၏လေးကြိုးတစ်ကြောင်း ဖြစ်သည်။ AB ၏ တစ်ဖက်တွင်ရှိသော စက်ဝန်းပေါ်တွင် P နှင့် Q အမှတ်နှစ်ခုကို မှတ်သား၍ AP၊ BP၊ AQ နှင့် BQ တို့ကိုဆက်သွယ်ပြီး စက်ဝိုင်းပြတ် APQB အတွင်းကျနေသော ∠APB နှင့် ∠AQB ထောင့်များကို တိုင်းတာကြည့်လျှင် တူညီသည်ကို တွေ့ရသည်။



(i) (ii) (iii)

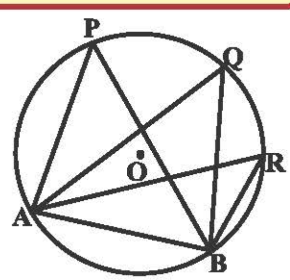
ပုံ ၅.၁၁

ပုံ ၅.၁၁ (ii) တွင် AB သည် အချင်းဖြစ်သည်။ စက်ဝိုင်းခြမ်းအတွင်းရှိ ထောင့်များ တူညီသောကြောင့် $\angle APB = \angle AQB = 90°$ ဖြစ်သည်။ ထို့ကြောင့် စက်ဝိုင်းပြတ် APQB အတွင်းကျနေသော $\angle APB$ နှင့် $\angle AQB$ တို့ တူညီသည်။

ပုံ ၅.၁၁ (iii) တွင် P နှင့် Q အမှတ်နှစ်ခုကို အဝန်းပိုင်း AB ၏တစ်ဖက်တည်းတွင် ယူထားသည်။ $\angle APB$ နှင့် $\angle AQB$ တို့သည် စက်ဝိုင်းပြတ် APQB တစ်ခုတည်းအတွင်းတွင် ရှိကြသည်။ ယင်းထောင့်တို့ကို လက်တွေ့တိုင်းတာကြည့်ပါက $\angle APB = \angle AQB$ ဖြစ်ကြောင်း တွေ့ရသည်။

အထက်ပါနည်းအတိုင်း စက်ဝန်းပေါ်တွင် အမှတ် P နှင့် Q တို့ကို နေရာများ ပြောင်းရွှေ့ပြီး လက်တွေ့စမ်းသပ်မှုများ ပြုလုပ်ကြည့်ပါက စက်ဝိုင်းပြတ်တစ်ခုတည်းအတွင်းရှိ $\angle APB$ နှင့် $\angle AQB$ တို့ တူညီသည်ကို တွေ့ရသည်။

စက်ဝိုင်းပြတ်တစ်ခုတည်းအတွင်းရှိ ထောင့်များ တူညီကြသည်။



ပုံစံတွက် ။ ပုံတွင် $\angle APB = 50°$ နှင့် $\angle PAQ = 35°$ ဟုပေးထားလျှင် $\angle AQB$ ၊ $\angle ARB$ နှင့် $\angle PBQ$ တို့ကိုရှာပါ။

$\angle APB$၊ $\angle AQB$ နှင့် $\angle ARB$ တို့သည် စက်ဝိုင်းပြတ် AQB အတွင်းရှိ ထောင့်များဖြစ်သည်။

$$\therefore \angle APB = \angle AQB = \angle ARB$$

$$\therefore \angle AQB = 50°,$$

$$\angle ARB = 50°$$

$\angle PAQ$ နှင့် $\angle PBQ$ တို့သည် စက်ဝိုင်းပြတ် PAQ အတွင်းရှိ ထောင့်များဖြစ်သည်။

$\therefore \angle PAQ = \angle PBQ$

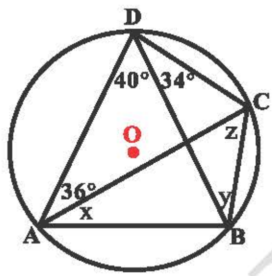
$\therefore \angle PBQ = 35^\circ$

- စက်ဝိုင်းပြတ်ကြီးအတွင်းရှိ ထောင့်များသည် ထောင့်ကျဉ်းများ ဖြစ်ကြသည်။
- စက်ဝိုင်းခြမ်းအတွင်းရှိ ထောင့်များသည် ထောင့်မှန်များ ဖြစ်ကြသည်။
- စက်ဝိုင်းပြတ်ငယ်အတွင်းရှိ ထောင့်များသည် ထောင့်ကျယ်များ ဖြစ်ကြသည်။

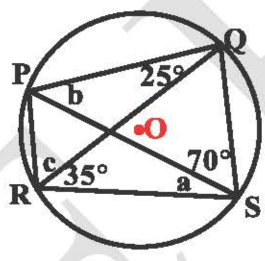
လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၅

အောက်ပါ O ဗဟိုရှိ စက်ဝိုင်းများတွင် a, b, c, d နှင့် x, y, z တို့၏ တန်ဖိုးများကို ရှာပါ။

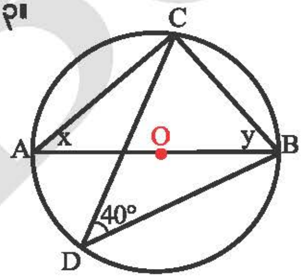
၁။



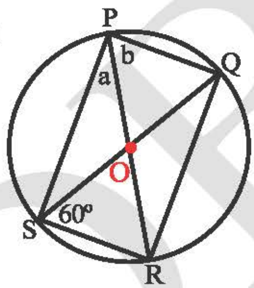
၂။



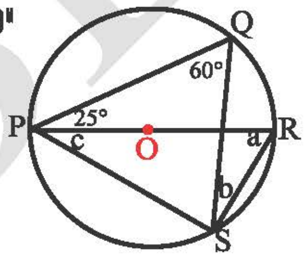
၃။



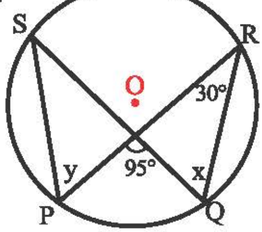
၄။



၅။



၆။



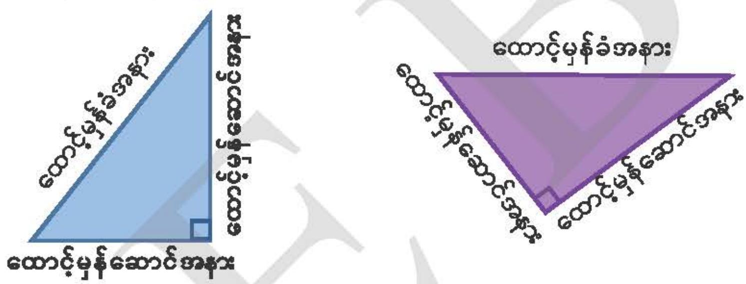
အခန်း ၆ ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်

ဆဋ္ဌမတန်းတွင် တြိဂံအမျိုးမျိုးအကြောင်းကို လေ့လာသိရှိခဲ့ရပြီး ယခုသတ္တမတန်းတွင်မူ တြိဂံအမျိုးမျိုးဆောက်လုပ်ဆွဲသားနည်းများကို အခန်း ၃ ၌လေ့လာခဲ့ကြပြီးဖြစ်သည်။

ဤသင်ခန်းစာတွင် ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခု၏ထူးခြားသည့်ဂုဏ်သတ္တိတစ်ခုဖြစ်သော **ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်**အကြောင်းကို လက်တွေ့လေ့လာကြမည်။ သင်ခန်းစာကို သင်ယူလေ့လာခြင်းဖြင့် ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်ကို လက်တွေ့စမ်းသပ် သက်သေပြနိုင်မည်ဖြစ်ပြီး အသုံးလည်း ပြုတတ်ကြမည်ဖြစ်သည်။

၆.၁ ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်

၆.၁.၁ ထောင့်မှန်တြိဂံ၏အနားများ



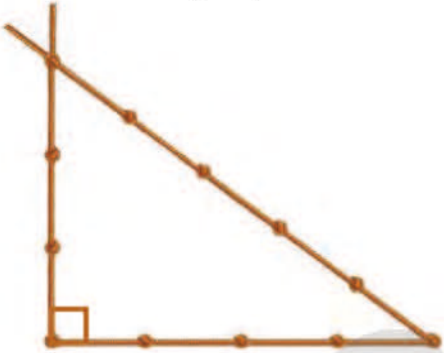
ပုံ ၆.၁

ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုတွင် ထောင့်မှန်နှင့်မျက်နှာချင်းဆိုင်သောအနားကို **ထောင့်မှန်ခံအနား** ဟုခေါ်ပြီး ထောင့်မှန်ခံအနားမဟုတ်သော ကျန်အနားနှစ်ဖက်ကို **ထောင့်မှန်ဆောင်အနားများ** ဟုခေါ်သည်။ ထောင့်မှန်တြိဂံတိုင်းတွင် ထောင့်မှန်ခံအနားသည် အရှည်ဆုံးအနားဖြစ်သည်။ (ပုံ ၆.၁ ကို ကြည့်ပါ။)

၆.၁.၂ ပိုက်သာဂိုရပ်၏လုပ်ဆောင်ချက်

လွန်ခဲ့သောနှစ်ထောင်ပေါင်းများစွာက ရှေးဟောင်းအီဂျစ်လူမျိုးများသည်ကြိုးများကို အထုံးများပြုလုပ်၍ မြေတိုင်းရာတွင်လည်းကောင်း၊ အိမ်ရာဆောက်လုပ်ရာတွင်လည်းကောင်း တိုင်းတာရန်အသုံးပြုခဲ့ကြသည်။ ယင်းတို့အသုံးပြုသောကြိုးတွင် စုစုပေါင်းအထုံးငယ် 13 ထုံး ပါရှိသည်။ ကြိုး၏ အစနှင့်အဆုံးတွင် အထုံးတစ်ခုစီပါရှိပြီး ကြိုးပေါ်ရှိကျန်အထုံးများသည် တူညီစွာ ကွာဝေးကြသည်ကို တွေ့ရှိရပေသည်။ (ပုံ ၆.၂ ကိုကြည့်ပါ။)

ပုံ ၆.၂



ပုံ ၆.၃

ထိုကြိုးထုံးကို အပိုင်း 3 ပိုင်းပါရှိသော အနားတစ်နား၊ အပိုင်း 4 ပိုင်းပါရှိသော အနားတစ်နားနှင့် အပိုင်း 5 ပိုင်းပါရှိသော အနားတစ်နားဖြင့် တြိဂံတစ်ခုအဖြစ် စီစဉ်ကြည့်ပါက ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခု ဖြစ်နေသည်ကိုတွေ့ရသည်၊ ဤသို့ရိုးရှင်းသော ကြိုးထုံးစနစ်ဖြင့် အလွန်ကြီးမားသည့် ပိရမစ်ကြီးများနှင့် အဆောက်အအုံကြီးများ၏ ထောင့်ချိုးများကို ထောင့်မှန်ကျအောင် တည်ဆောက်နိုင်ခဲ့ကြသည်၊

BC-530 ခန့်တွင် ဂရိသင်္ချာပညာရှင် ပိုက်သာဂိုရပ် (Pythagoras) ၏ အရေးပါသောလုပ်ဆောင်ချက်ဖြစ်သည့် ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ် ရယူခြင်းကို ဂုဏ်ပြုသောအားဖြင့် ဂရိနိုင်ငံတွင် အောက်ပါ တံဆိပ်ခေါင်းကို အမှတ်တရထုတ်ဝေခဲ့သည်၊ (ပုံ ၆.၄ ကိုကြည့်ပါ။)

ပုံ ၆.၄

ဤတံဆိပ်ခေါင်းကိုသတိပြုကြည့်ပါက အရှည်ဆုံးအနားပေါ်ရှိ စတုရန်းကွက်ငယ်များ၏ အရေအတွက်သည် ကျန်အနားနှစ်ဖက်ပေါ်ရှိ စတုရန်းကွက်ငယ်များ၏ စုစုပေါင်းအရေအတွက်နှင့် တူညီနေကြောင်းကို တွေ့ရသည်၊

ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်

ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုတွင် ထောင့်မှန်ခံအနားပေါ်ရှိ စတုရန်း၏ဧရိယာသည် ကျန်အနားနှစ်ဖက်ပေါ်ရှိ စတုရန်းများ၏ဧရိယာများပေါင်းလဒ်နှင့် တူညီသည်။

၆.၂ ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်ကိုလက်တွေ့စမ်းသပ်လေ့လာခြင်း

၆.၂.၁ တံဆိပ်ခေါင်းပုံကိုလေ့လာခြင်း

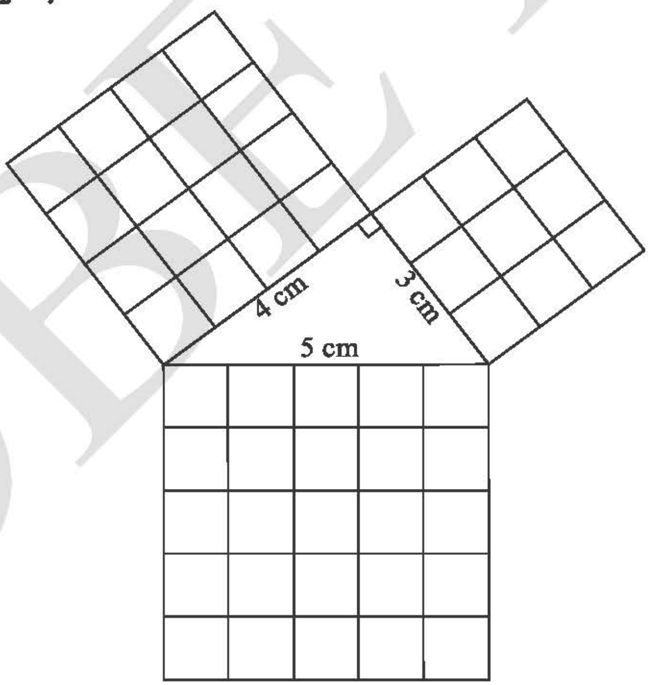
ပုံ ၆.၄ တွင်ဖော်ပြခဲ့သည့် တံဆိပ်ခေါင်း၌ ပါရှိသောထူးခြားချက်တစ်ရပ်ကို အောက်ပါအဆင့်များအတိုင်း လက်တွေ့လေ့လာဖော်ထုတ်နိုင်သည်။

အဆင့် (၁) ထောင့်မှန်ခံအနား၏အလျားသည် 5 cm ရှိပြီး ကျန်အနားများ၏အလျားများ 4 cm နှင့် 3 cm အသီးသီးရှိသော ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုကိုဆွဲပါ။

အဆင့် (၂) အနားတစ်ဖက်စီပေါ်တွင် စတုရန်းတစ်ခုစီ ဆောက်လုပ်ပါ။

အဆင့် (၃) ရရှိထားသောစတုရန်းတစ်ခုစီတွင် အနားတစ်ဖက်လျှင် 1 cm စီရှိသည့် စတုရန်းကွက်ငယ်များရရှိစေရန် စိတ်ပိုင်းပါ။

အဆင့် (၄) အနားအသီးသီးပေါ်ရှိ စတုရန်းကွက်ငယ်များကိုရေတွက်သော် အလျား 3 cm အနားပေါ်ရှိ စတုရန်းတွင် စတုရန်းအကွက်ငယ်ပေါင်း 9 ကွက်၊ အလျား 4 cm အနားပေါ်ရှိ စတုရန်းတွင် စတုရန်းအကွက်ငယ်ပေါင်း 16 ကွက်နှင့် ထောင့်မှန်ခံအနားပေါ်ရှိ စတုရန်းတွင် စတုရန်းအကွက်ငယ်ပေါင်း 25 ကွက် ရှိသည်ကို တွေ့ရှိကြရမည်။ (ပုံ ၆.၅ ကိုကြည့်ပါ။)



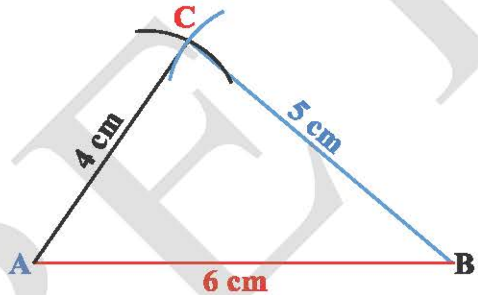
ပုံ ၆.၅

ထို့ကြောင့် ထောင့်မှန်ခံအနားပေါ်ရှိ စတုရန်းကွက်အရေအတွက်သည် ကျန်အနားနှစ်ဖက်ပေါ်ရှိ စတုရန်းကွက်များ၏ အရေအတွက်များပေါင်းလဒ်နှင့် တူညီနေသည်ကို တွေ့ရသည်။

အထက်ပါစမ်းသပ်ချက်ကိုအသုံးပြု၍ ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုတွင် ထောင့်မှန်ခံအနားပေါ်ရှိ စတုရန်း၏ဧရိယာသည် ကျန်အနားနှစ်ဖက်ပေါ်ရှိ စတုရန်းများ၏ ဧရိယာများပေါင်းလဒ်နှင့်တူညီကြောင်းကို လက်တွေ့စမ်းသပ်ပြသနိုင်သည်။

ဖော်ပြပါစမ်းသပ်ချက်တွင် တြိဂံ၏အနားများသည် 3 cm, 4 cm နှင့် 5 cm အသီးသီး ရှိသဖြင့် အနားများ၏အလျားများသည် 3 : 4 : 5 အချိုးဖြစ်နေသည့်အပြင် ဆက်တိုက်ကိန်းပြည့်သုံးလုံးလည်း ဖြစ်နေသောကြောင့် ဤအတိုင်းရှိသောတြိဂံသာလျှင် ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုဖြစ်သလား သို့မဟုတ် အခြားဆက်တိုက်ကိန်းပြည့်သုံးလုံးအတိုင်း အနားများအလျားရှိနေသော တြိဂံများသည်လည်း ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုဖြစ်နိုင်သလား ဟူသောမေးခွန်းထွက်ပေါ်လာသည်။

သို့ဖြစ်၍ အနားတစ်ဖက်စီ၏အလျားများအဖြစ် 4 cm, 5 cm နှင့် 6 cm ဟုယူထားသော တြိဂံတစ်ခုကို ဆွဲကြည့်ကြမည်။ (ပုံ ၆.၆ ကိုကြည့်ပါ။)



ပုံ ၆.၆

ဆွဲထားသောပုံတွင် အကြီးဆုံးအနားကို မျက်နှာချင်းဆိုင်သော ထောင့်၏ပမာဏကိုတိုင်းကြည့်ရာ 90° မရှိသဖြင့် ΔABC သည် ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခု မဟုတ်ကြောင်းတွေ့ရမည်။ အလားတူဆက်တိုက်ဖြစ်နေသော အခြားကိန်းပြည့် 3 လုံးတို့ကို အနားများ၏အလျားများအဖြစ်ယူ၍ တြိဂံများဆွဲကြည့်ပါက ထောင့်မှန်တြိဂံများ မဖြစ်ကြောင်းကိုတွေ့ရပေမည်။ ထို့ကြောင့် အနားများ၏ အလျားများသည် ဆက်တိုက်ကိန်းပြည့်များဖြစ်နေခြင်းက ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုဖြစ်စေသောအကြောင်းရင်းမဟုတ်ကြောင်းကို တွေ့ရှိရသည်။

တစ်ဖန် အနားများ၏အလျားများသည် 3:4:5 နှင့် အချိုးတူသော ကိန်းများဖြစ်သောအခါ၌လည်း ထိုတြိဂံသည် ထောင့်မှန်တြိဂံဖြစ်မဖြစ်ကို စမ်းသပ်ကြည့်နိုင်ပြန်သည်။ နမူနာအားဖြင့် အနားများအလျား 6 cm, 8 cm, 10cm အသီးသီးရှိသော တြိဂံကိုဆွဲကြည့်ပြီး 10cm နှင့် မျက်နှာချင်းဆိုင်သော

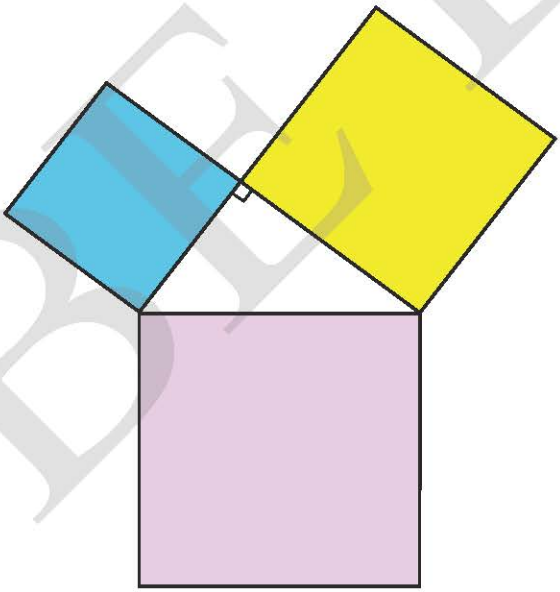
ထောင့်ကို တိုင်းကြည့်လျှင် ထောင့်မှန်ဖြစ်ကြောင်း တွေ့ရမည်။ အလားတူ အခြားအချိုးတူကိန်းတွဲများဖြင့် စမ်းသပ်ကြည့်နိုင်သည်။

ထို့ကြောင့် ထောင့်မှန်တြိဂံတိုင်းသည် ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်ကို ပြေလည်ကြောင်း မှတ်သားနိုင်သည်။ အပြန်အလှန်အားဖြင့် တြိဂံတစ်ခု၏ အနားတစ်ဖက်ပေါ်ရှိ စတုရန်း၏ဧရိယာသည် ကျန်အနားတစ်ဖက်စီပေါ်ရှိ စတုရန်းများ၏ ဧရိယာများပေါင်းလဒ်နှင့် တူညီလျှင်လည်း ထိုတြိဂံသည် ထောင့်မှန်တြိဂံဖြစ်ကြောင်း မှတ်သားနိုင်သည်။

၆.၂.၂ စတ္တုရများပိုင်းဖြတ်၍လေ့လာခြင်း

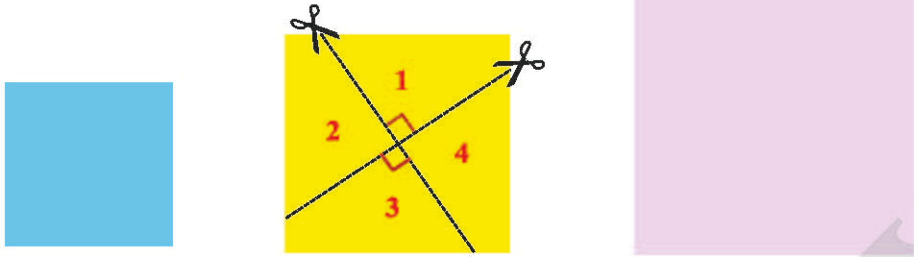
ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်၏မှန်ကန်ချက်ကို အခြားနည်းလမ်းတစ်ခုသုံး၍ ထပ်မံလေ့လာကြမည်။

အဆင့် (၁) စာရွက်တစ်ရွက်ပေါ်တွင် ထောင့်မှန်ခံအနား 5 cm ရှိပြီး၊ ကျန်အနားနှစ်ဖက် 4 cm နှင့် 3 cm ရှိသော ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုကို ဆွဲပါ။ ထိုတြိဂံ၏အနားများပေါ်တွင်လည်း စတုရန်းအသီးသီးကို ဆွဲပါ။



ပုံ ၆.၇

အဆင့် (၂) ဆွဲသားထားသောစတုရန်းများကို ကတ်ကြေးဖြင့်ဖြတ်ပါက ပုံ ၆.၈ အတိုင်းစတုရန်း 3 ခု ကိုရရှိမည်။



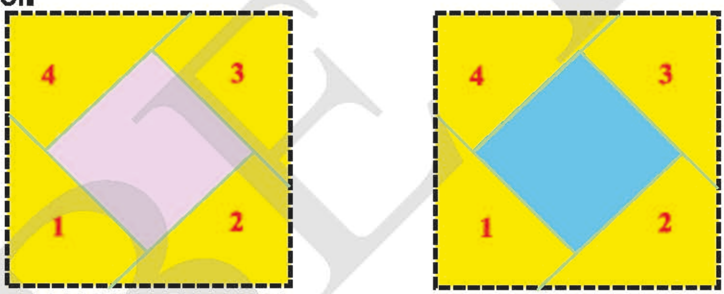
အငယ်ဆုံးအနား ပေါ်ရှိစတုရန်း

အလယ်အလတ်အနား ပေါ်ရှိစတုရန်း

အကြီးဆုံးအနား ပေါ်ရှိစတုရန်း

ပုံ ၆.၈

အဆင့် (၃) ရရှိလာသောစတုရန်းများထဲမှ အလယ်အလတ်အရွယ်အစားရှိသောစတုရန်းကိုယူပါ။ အကြီးဆုံးစတုရန်း၏အနားအလျားအတိုင်းယူသောမျဉ်းနှစ်ကြောင်းကို စတုရန်းလတ်၏ မျက်နှာချင်းဆိုင်အနားနှစ်ခုကြားတွင်ဆွဲပါ။ ထိုမျဉ်းနှစ်ကြောင်းသည် တစ်ကြောင်းနှင့်တစ်ကြောင်း ထောင့်မှန်ကျနေမည်။ ထိုမျဉ်းများအတိုင်း ကတ်ကြေးဖြင့်ဖြတ်ထုတ်ပါ။



အကြီးဆုံးစတုရန်းပေါ်သို့ ဖြတ်စများကပ်ပုံ
(i)

အငယ်ဆုံးစတုရန်းကို အလယ်ကွက်လပ်တွင်ထည့်ပုံ
(ii)

ပုံ ၆.၉

အဆင့် (၄) ဖြတ်ထုတ်ထားသော စက္ကူစများကို အကြီးဆုံးစတုရန်းထဲသို့ ပုံ ၆.၉ (i) တွင်ပြထားသည့်အစီအစဉ်အတိုင်း ထည့်သွင်းပါ။ ထို့နောက်အလယ်တွင် အငယ်ဆုံးစတုရန်းကို ထည့်သွင်းပါက ပုံ ၆.၉ (ii) အတိုင်း ဝင်သွားသည်ကို တွေ့ရမည်။

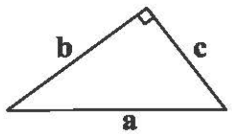
ဤစမ်းသပ်ချက်အရ ထောင့်မှန်တြိဂံ၏ ထောင့်မှန်ခံအနားပေါ်ရှိ စတုရန်း၏ဧရိယာသည် ကျန်အနားနှစ်ဖက်ပေါ်ရှိစတုရန်းများ၏ ဧရိယာများပေါင်းလဒ်နှင့် တူညီနေကြောင်းကို တွေ့ရှိရသည်။

အခြားသော ထောင့်မှန်တြိဂံများဖြင့်လည်း တစ်ဖက်ပါစမ်းသပ်ချက်ကို လက်တွေ့ပြုလုပ်နိုင်ပါသည်။

၆.၃ ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်ကိုအသုံးချခြင်း

ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်ကို ထောင့်မှန်တြိဂံ၏ အနားများရှာရာတွင် အဓိကအသုံးပြုသည်။ အထူးသဖြင့် အင်ဂျင်နီယာပညာ၊ ဗိသုကာပညာနှင့် အခြားလက်တွေ့ပြဿနာအချို့တွင် ထောင့်မှန်တြိဂံများ၏ အနားနှစ်နားကို ပေးထားပြီး ကျန်အနားတစ်နား ရှာလိုသောအခါ၌ ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်ကို အသုံးပြုကြသည်။

ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်ကို အောက်ပါအတိုင်း ဖော်ပြနိုင်သည်။

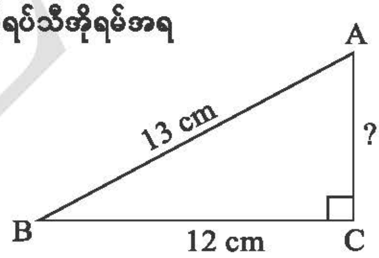


ပုံ ၆.၁၀

a သည်ထောင့်မှန်ခံအနားဖြစ်ပြီး၊ b နှင့် c တို့သည်ထောင့်မှန်တြိဂံ၏ ကျန်အနားများဖြစ်ကြလျှင် $a^2 = b^2 + c^2$ ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၁။ ထောင့်မှန် $\triangle ABC$ တွင် ထောင့်မှန်ခံအနား AB = 13 cm နှင့် BC = 12 cm တို့ကိုပေးထားလျှင် ကျန်အနား AC ကိုရှာပါ။

ထောင့်မှန် $\triangle ABC$ တွင် ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်အရ



$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$

$AC^2 = 13^2 - 12^2$

$= 169 - 144$

$= 25$

$AC = \sqrt{25}$

$\therefore AC = 5\text{ cm}$

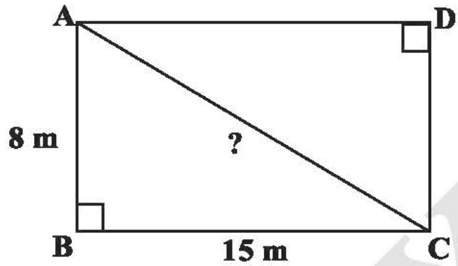
ပုံစံတွက် ၂။ ထောင့်မှန်စတုဂံပုံမြေကွက်တစ်ကွက်၏အလျားသည် 15 m ရှိပြီး အနံသည် 8 m ရှိလျှင် ထိုမြေကွက်၏ထောင့်ဖြတ်အလျားကိုရှာပါ။

ထောင့်မှန်စတုဂံပုံမြေကွက် ABCD တွင် BC = 15 m နှင့် AB = 8 m ဖြစ်ပါစေ။

ထောင့်မှန် $\triangle ABC$ တွင် ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်အရ

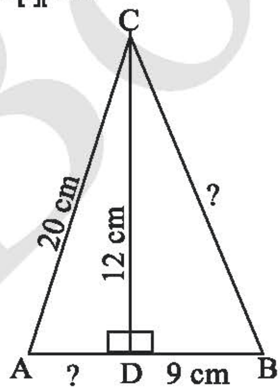
$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC^2 = 8^2 + 15^2$$
$$= 64 + 225$$
$$= 289$$
$$AC = \sqrt{289}$$
$$\therefore AC = 17 \text{ m}$$



$\therefore$ မြေကွက်၏ထောင့်ဖြတ်အလျား $= 17$ m

ပုံစံတွက် ၃။ ပေးထားသော ΔABC တွင် CD သည် အမြင့်မျဉ်းဖြစ်သည်။ CD = 12 cm, BD = 9 cm, AC = 20 cm ဖြစ်လျှင် BC နှင့် AD ကိုရှာပါ။



ထောင့်မှန် ΔBDC တွင် ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်အရ

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$
$$= 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$
$$BC = \sqrt{225}$$
$$\therefore BC = 15 \text{ cm}$$

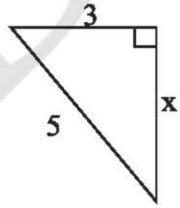
ထောင့်မှန် ΔADC တွင် ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်အရ

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$
$$20^2 = AD^2 + 12^2$$
$$AD^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$$
$$AD = \sqrt{256}$$
$$\therefore AD = 16 \text{ cm}$$

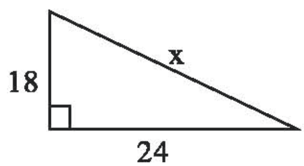
လေ့ကျင့်ခန်း ၆.၁

၁။ အောက်ဖော်ပြပါ တြိဂံတို့တွင် လိုအပ်သော အနားအလျား x ကိုရှာပါ။

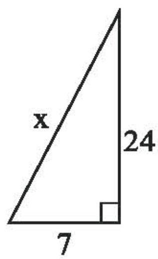
(က)



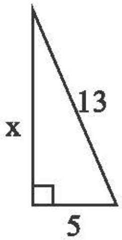
(ခ)



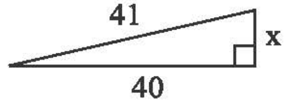
(ဂ)



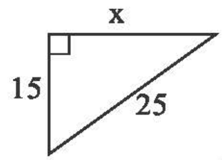
(ဃ)



(င)



(စ)



၂။ ΔABCတွင် $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $\angle ABC = 90^\circ$ ဖြစ်လျှင် AC ၏ အလျားကို

(က) အတိအကျပုံဆွဲ၍ တိုင်းတာခြင်းဖြင့်လည်းကောင်း

(ခ) တွက်ယူခြင်းဖြင့်လည်းကောင်း ရှာပြီး အဖြေနှစ်ခုကို တူ မတူ စစ်ကြည့်ပါ။

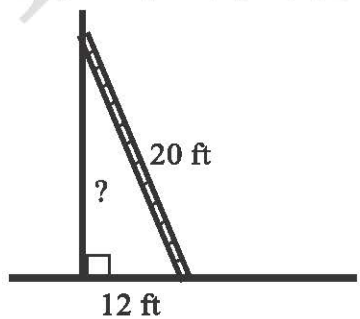
၃။ တြိဂံတစ်ခု၏ အနားအသီးသီးအလျားတို့ကို အောက်ပါအတိုင်း ပေးထားသည်။ မည်သည့်တြိဂံသည် ထောင့်မှန်တြိဂံဖြစ်မည်နည်း။

(က) 8, 10, 12 (ခ) 30, 40, 50 (ဂ) 20, 21, 22

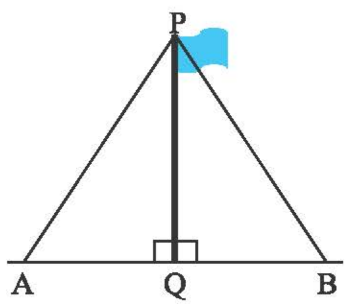
၄။ အလျား 20 cm နှင့် အနံ 15 cm ရှိသော ထောင့်မှန်စတုဂံတစ်ခု၏ထောင့်ဖြတ်အလျားကိုရှာပါ။

၅။ အလျား 8 cm နှင့် 6 cm ရှိသော ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းများပါရှိသည့် ရွမ်းဗတ်ပုံတစ်ခုကို ရေးဆွဲပြီး ယင်း၏ပတ်လည်အနားကိုရှာပါ။

၆။ ပေးထားသောပုံတွင် လှေကားသည် 20 ft ရှည်ပြီး နံရံတစ်ခုကိုမှီလျက် ထောင်ထားသည်။ လှေကား၏ အောက်ခြေသည်နံရံမှ 12 ft ကွာဝေးလျှင် လှေကားထိပ်နှင့်ထိစပ်နေသော နံရံ၏အမြင့်ကိုရှာပါ။



၇။ ပုံတွင် 16 ft မြင့်သော အလံတိုင် PQ ကို မြေပြင်ပေါ်တွင် ထောင့်မတ်ကျစိုက်ထူထားသည်။ အလံတိုင်ထိပ်မှ ကြိုးနှစ်ချောင်း PA နှင့် PB ကို မြေပြင်ပေါ်ရှိ အမှတ် A နှင့် B တွင်တွဲချည်ထားသည်။ ကြိုးတစ်ချောင်းစီသည် 34 ft ရှည်လျားသော်မြေပြင်ပေါ်ရှိအမှတ် A နှင့် အမှတ် B ကြားတွင်ရှိသောအကွာအဝေးကိုရှာပါ။

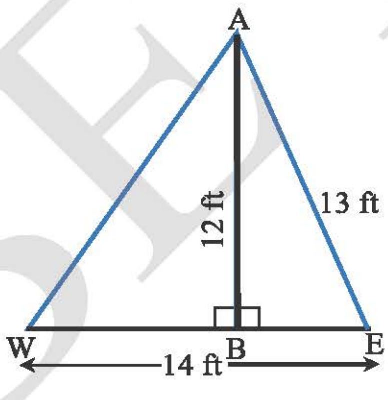


၈။ သင်္ဘောတစ်စင်းသည် ဆိပ်ကမ်းမှ အနောက်စူးစူး 9 km အကွာသို့ထွက်ခဲ့ပြီး တစ်ဖန် မြောက်စူးစူး 40 km အကွာသို့ ထွက်ခဲ့ပြန်၏။ သင်္ဘောသည် မူလဆိပ်ကမ်းမှ မည်မျှအကွာတွင် ရောက်ရှိနေသနည်း။

၉။ စူးစမ်းရှာဖွေသူတစ်ဦးသည် သူ၏စခန်း C မှ တောင်ဘက်စူးစူးရှိ နေရာ A သို့ 12 km ခရီးထွက်ခဲ့၏။ တစ်ဖန် A မှ အနောက်ဘက်စူးစူး 16 km အကွာရှိ B နေရာသို့ ထွက်ခဲ့ပြန်၏။ သူသည်စခန်း C မှ မည်မျှဝေးသောနေရာတွင် ရှိနေမည်နည်း။

၁၀။ နာရီစင်တစ်ခု၏အမြင့်သည် 15 m မြင့်သည်။ နာရီစင်၏တစ်ဖက်တစ်ချက်တွင်လူနှစ်ယောက်ရှိနေပြီး ပထမလူသည်နာရီစင်၏ထိပ်မှ 17 m ကွာဝေးသည်။ လူနှစ်ဦး၏ကြားအကွာအဝေးသည် 28 m ဖြစ်လျှင် ဒုတိယလူနှင့်နာရီစင်၏မြေပြင်အကွာအဝေးကိုရှာပါ။

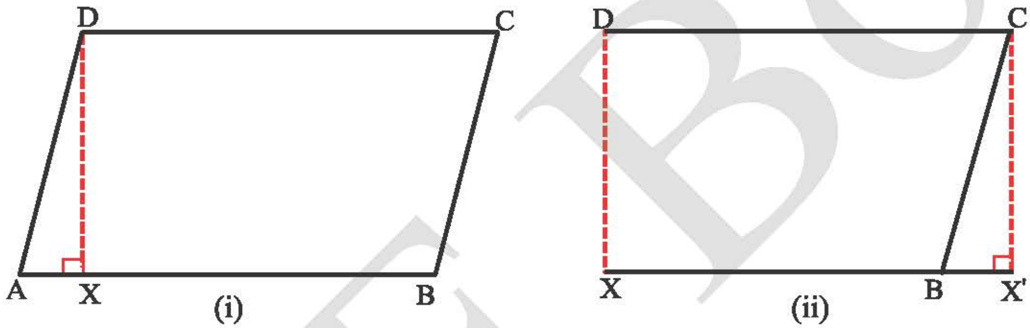
၁၁။ 12 ft မြင့်သော ကြေးနန်းတိုင်တစ်တိုင်ကို အရှေ့စူးစူးဘက်ရှိ ငုတ်တိုင်တွင် 13 ft ရှည်သော ကြိုးတစ်ချောင်းဖြင့် ဆိုင်းထားပြီး အနောက်စူးစူးဘက်ရှိငုတ်တိုင်တွင် နောက်ထပ်ကြိုးတစ်ချောင်းဖြင့် ချည်ဆိုင်းထားသည်။ ငုတ်နှစ်ခု၏အကွာအဝေးသည် 14 ft ရှိသော် အနောက်ဘက်သို့ဆိုင်းထားသော ကြိုး၏အလျားကိုရှာပါ။



အခန်း ၇ ပမာဏသင်္ချာ (ဧရိယာ)

ဆဋ္ဌမတန်းတွင် ထောင့်မှန်စတုဂံ၊ စတုရန်းနှင့် တြိဂံတို့၏ဧရိယာကို ပုံသေနည်းများ ထုတ်ဖော်၍ တွက်ယူနိုင်ခဲ့ပြီဖြစ်သည်။ ဤသင်ခန်းစာတွင်အနားပြိုင်စတုဂံ၊ ထြာပီဇီယမ်စသည့် လွယ်ကူသော ပြင်ညီပုံများ၏ ဧရိယာရှာနည်းတို့ကို လေ့လာကြမည်။ ထို့နောက် သိရှိပြီးဖြစ်သော ပုံသေနည်းများဖြင့် ပုံမှန်မဟုတ်သောဗဟုဂံတို့၏ဧရိယာကို မည်သို့ရှာနိုင်ကြောင်း ဆက်လက် လေ့လာကြမည်။ ဤသင်ခန်းစာသင်ယူပြီးပါက ဗဟုဂံများ၏ ဧရိယာများကို ရှာနိုင်မည် ဖြစ်သည်။

၇.၁ အနားပြိုင်စတုဂံ၏ ဧရိယာရှာခြင်း



ပုံ ၇.၁

အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ကို ကတ်ပြားတစ်ခုပေါ်တွင် ရေးဆွဲပြီး ဖြတ်ပါ။ D မှ AB ပေါ်သို့ ပုံ ၇.၁ (i) အတိုင်းထောင့်မတ်မျဉ်း DX ကိုဆွဲပါ။ ထောင့်မှန်တြိဂံ DXA ကို ရရှိမည်။ ထို့နောက် DX မျဉ်းတစ်လျှောက် ကတ်ကြေးဖြင့်ဖြတ်၍ ΔDXA မှ AD အနားကို BC ပေါ်သို့ထပ်လိုက်ပါ။ ထိုအခါ ပုံ ၇.၁ (ii) အတိုင်း AD နှင့် BC တို့သည် တစ်ထပ်တည်းကျရောက်ပြီး $\Delta CX'B$ သည် ΔDXA ၏ နေရာသစ်ဖြစ်လာသည်။ ထို့နောက် ထောင့်မှန်စတုဂံ XX'CD ဖြစ်ပေါ်လာမည်။ ထိုအခါ အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ၏ ဧရိယာသည် ထောင့်မှန်စတုဂံ XX'CD ၏ ဧရိယာနှင့် တူညီကြောင်းလွယ်ကူစွာ တွေ့နိုင်သည်။

ထိုအခါ $AX = BX'$

$$\begin{aligned} AB &= AX + XB \\ &= BX' + XB \\ &= XB + BX' = XX' \end{aligned}$$

အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ၏ ဧရိယာ = ထောင့်မှန်စတုဂံ XX'CD ၏ ဧရိယာ

$= XX' \times DX$

$= AB \times DX$

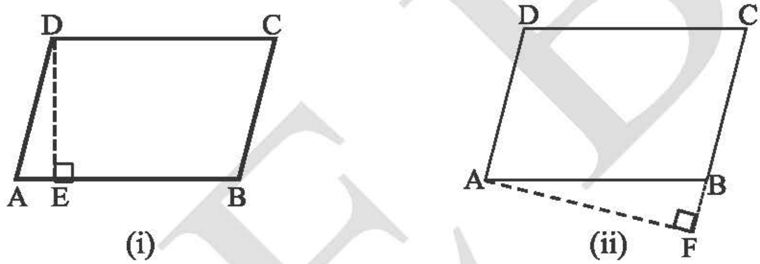
ထို့ကြောင့် အနားပြိုင်စတုဂံ၏ ဧရိယာ = အခြေ × အမြင့် ဖြစ်သည်။

အကယ်၍ b သည် အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခု၏ အခြေဖြစ်၍ h သည် ထောင့်မတ်မျဉ်း (အမြင့်မျဉ်း) ဖြစ်ပြီး A သည် ထိုအနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခု၏ဧရိယာဖြစ်လျှင် $\boxed{A = bh}$ ဖြစ်သည်။

အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခု၏ဧရိယာ = အခြေ × အမြင့်

ပုံစံတွက် ၁။ ပေးထားသောအနားပြိုင်စတုဂံပုံများမှ အခြေအနားနှင့် အမြင့်မျဉ်းတို့ကိုဖော်ပြပါ။

ပုံ ၇.၂ (i) တွင် အခြေအနားသည် AB ဖြစ်ပြီး အမြင့်မျဉ်းသည် DE ဖြစ်သည်။



ပုံ ၇.၂

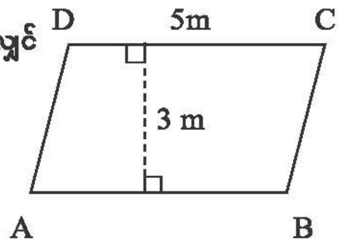
ပုံ ၇.၂ (ii) တွင် အခြေအနားသည် BC ဖြစ်၍ အမြင့်မျဉ်းသည် AF ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၂။ အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD တွင် CD = 5 m ဖြစ်၍ AB နှင့် CD တို့အကြား အကွာအဝေးသည် 3 m ဖြစ်လျှင် အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ၏ ဧရိယာကို ရှာပါ။

အနားပြိုင်စတုဂံ ABCD ၏ဧရိယာသည် A ဖြစ်လျှင်

A = အခြေ × အမြင့် ဖြစ်သည်။

$\therefore A = 5 \times 3 = 15\ m^2$



ပုံစံတွက် ၃။ အနားပြိုင်စတုဂံတစ်ခု၏ ဧရိယာသည် $100.8\ \text{cm}^2$ ဖြစ်၍ ယင်း၏ အနားတစ်ဖက်သည် 12 cm ဖြစ်လျှင် ထိုအနားပေါ်သို့ဆွဲသော အမြင့်မျဉ်း၏ အလျားကိုရှာပါ။

ဧရိယာ $A = 100.8\ \text{cm}^2$, အခြေ $b = 12$ cm ဟုထားလျှင်

ပုံသေနည်း $A = bh$ ကိုအသုံးပြု၍

$100.8 = 12 \times h$ ကိုရသည်။

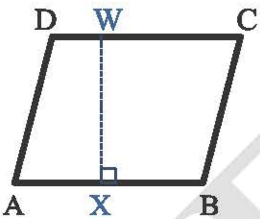
$$\therefore\ h = \frac{100.8}{12} = 8.4\ \text{cm}$$

ထို့ကြောင့်အမြင့်မျဉ်း၏ အလျားသည် 8.4 cm ဖြစ်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၇.၁

၁။ ပေးထားသော အနားပြိုင်စတုဂံပုံများကို ကြည့်၍ ကွက်လပ်များကို ဖြည့်ပါ။

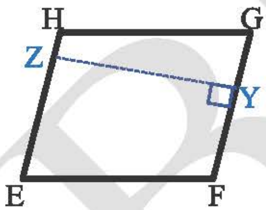
(က)



AB သည် ------------------------- ဖြစ်သည်။

WX သည်------------------------ဖြစ်သည်။

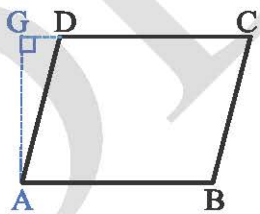
(ခ)



------------------သည် အခြေအနားဖြစ်သည်။

------------------သည် အမြင့်မျဉ်းဖြစ်သည်။

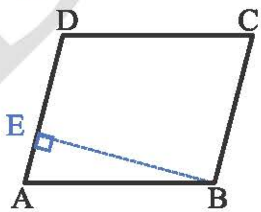
(ဂ)



DC သည် ------------------------- ဖြစ်သည်။

AG သည်------------------------ဖြစ်သည်။

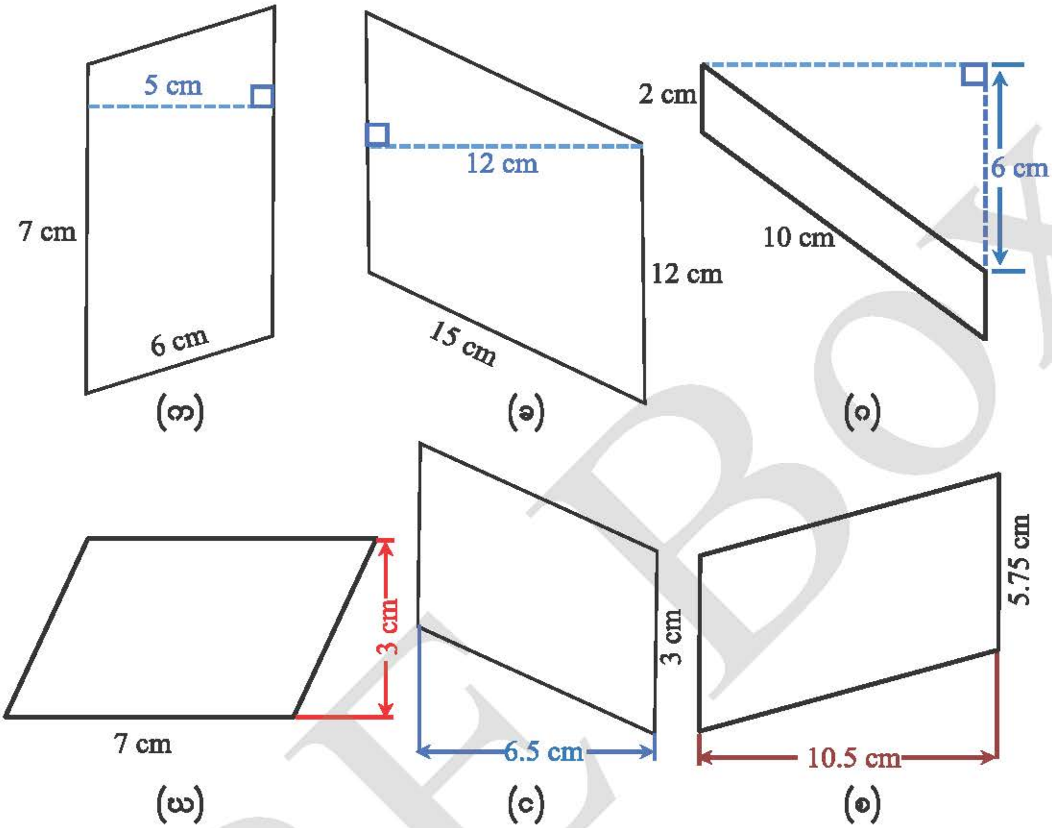
(ဃ)



------------------သည် အခြေအနားဖြစ်သည်။

------------------သည် အမြင့်မျဉ်းဖြစ်သည်။

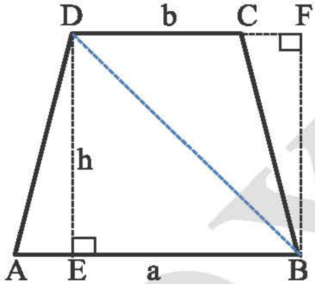
၂။ ပေးထားသောအနားပြိုင်စတုဂံတို့၏ ဧရိယာများကိုရှာပါ။



၃။ ပေးထားသောအနားပြိုင်စတုဂံများ၏ လိုအပ်သောဧရိယာ၊ အခြေနှင့် အမြင့်များကိုဖြည့်စွက်ပါ။ သတ်မှတ်ထားသော ယူနစ်အရပေးပါ။

အနားပြိုင်စတုဂံ	အခြေ	အမြင့်	ဧရိယာ
ABCD	30 cm	2 cm	---------- cm^2
PQRS	35 mm	---------- mm	112 mm^2
DEFG	-------------- m	50 m	325 m^2
TUVW	550 m	70 m	------------- m^2

၇.၂ ထြာပီဇီယမ်တစ်ခု၏ ဧရိယာရှာခြင်း



ပုံ ၇.၃

ABCD သည် ထြာပီဇီယမ်တစ်ခုဖြစ်၍ AB နှင့် DC တို့သည် မျဉ်းပြိုင်များဖြစ်ကြသည်။ DE ⊥ AB နှင့် B မှ DC ဆက်ဆွဲမျဉ်းပေါ်သို့ ထောင့်မတ်မျဉ်း BF ကိုဆွဲပါ။ AB // DC ဖြစ်သဖြင့် DE = BF ဖြစ်သည်။

ထောင့်ဖြတ်မျဉ်း BD ကိုဆွဲပါ။ BD သည် ထြာပီဇီယမ် ABCD ကို တြိဂံနှစ်ခုအဖြစ် ပိုင်းဖြတ်သည်။ AB = a ယူနစ်၊ CD = b ယူနစ်နှင့် DE = BF = h ယူနစ် အသီးသီး ဖြစ်လျှင်

ΔABD ၏ဧရိယာ $= \frac{1}{2} \times AB \times DE = \frac{1}{2} a\,h,$

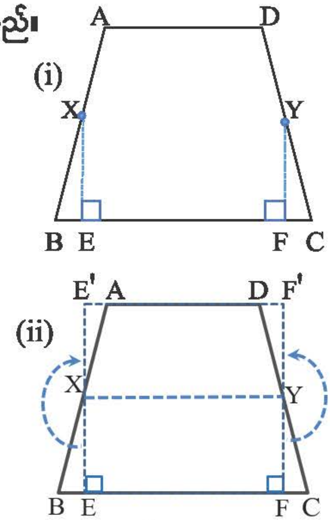
ΔBCD ၏ဧရိယာ $= \frac{1}{2} \times DC \times BF = \frac{1}{2} b\,h$ ဖြစ်သည်။

ထြာပီဇီယမ် ABCD ၏ဧရိယာ $= \Delta ABD$ ၏ဧရိယာ $+ \Delta BCD$ ၏ဧရိယာ

$$= \frac{1}{2} a\,h + \frac{1}{2} b\,h$$

$$= \frac{1}{2}(a+b)\,h$$

ထို့ကြောင့်ထြာပီဇီယမ်တစ်ခု၏ဧရိယာသည်ပြိုင်သောအနားနှစ်ဖက်တို့၏ပျမ်းမျှအလျားနှင့် ထိုအနားနှစ်ဖက်ကြားအကွာအဝေးတို့၏မြှောက်လဒ်နှင့် တူညီသည်။



ပုံ ၇.၄

ထြာပီဇီယမ်တစ်ခု၏ဧရိယာကို အောက်ပါအတိုင်း လက်တွေ့ပြုလုပ်ခြင်းဖြင့်လည်း ရှာနိုင်သည်။

ထြာပီဇီယမ် ABCD တွင် BC နှင့် AD တို့သည် မျဉ်းပြိုင်များဖြစ်ကြသည်။ AB နှင့် DC တို့၏ အလယ်မှတ်များဖြစ်ကြသော X နှင့် Y တို့မှ ထောင့်မတ်မျဉ်း XE နှင့် YF တို့ကို BC ပေါ်သို့ဆွဲပါ။

ΔXBE ကိုဖြတ်ထုတ်ပြီး အမှတ် X ၌ ပတ်၍ XB ကို XA နှင့်တစ်ထပ်တည်းကျအောင် လှည့်ပေးလိုက်လျှင် ΔXBE နှင့် $\Delta XAE'$ တို့တစ်ထပ်တည်းကျမည်။

ထိုနည်းတူ ΔYFC ကို ဖြတ်ထုတ်ပြီး အမှတ် Y ၌ ပတ်၍ လှည့်ပေးလိုက်လျှင် ΔYFC နှင့် $\Delta YF'D$ တို့ တစ်ထပ်တည်းကျမည်။

ဖြစ်ပေါ်လာသောစတုဂံ EFF'E' သည် ထောင့်မှန်စတုဂံတစ်ခုဖြစ်သည်။ ထောင့်မှန်စတုဂံ EFF'E' ၏ဧရိယာသည် ထြာပီဇီယမ် ABCD ၏ ဧရိယာနှင့်တူညီကြောင်း တွေ့ရမည်။ ထောင့်မှန်စတုဂံ EFF'E' ၏အနားများ EF, E'F'တို့သည် အလယ်မှတ်နှစ်ခုကို ဆက်သွယ်သည့်မျဉ်း XY နှင့် တူညီနေမည်။ ထို့ပြင် XY၏ အလျားသည် AD နှင့် BC အလျားများပေါင်းလဒ် တစ်ဝက်နှင့်ညီကြောင်း တွေ့ရမည်။

$$XY = \frac{AD+BC}{2}$$

ထို့ကြောင့် XY သည် ထြာပီဇီယမ် ABCD ၏ ပြိုင်လျက်ရှိသော အနားတစ်စုံတို့၏ ပျမ်းမျှအလျား ဖြစ်သည်။

ထြာပီဇီယမ် ABCD ၏ဧရိယာ $=$ ထောင့်မှန်စတုဂံ EFF'E' ၏ဧရိယာ $=$ အခြေ $\times$ အမြင့်

$$= EF \times EE'$$

$$= XY \times EE' = \frac{AD+BC}{2} \times EE'$$

အကယ်၍ $AD = a$ ယူနစ်၊ $BC = b$ ယူနစ်နှင့် $EE' = h$ ယူနစ် အသီးသီးဖြစ်၍ A သည် ထြာပီဇီယမ်၏ ဧရိယာဖြစ်လျှင် $A = \frac{1}{2}(a+b)\,h$ ဖြစ်သည်။

ထြာပီဇီယမ်တစ်ခု၏ဧရိယာ = ပြိုင်သောအနားနှစ်ဖက်တို့၏ ပျမ်းမျှအလျား × အမြင့်

ပုံစံတွက် ၁။ ထြာပီဇီယမ်တစ်ခု၏ပြိုင်သောအနားတစ်စုံ၏အလျားများသည် 12.5 cm နှင့် 9 cm ဖြစ်ကြ၍ ၎င်းမျဉ်းနှစ်ခုကြားအကွာအဝေးသည် 6 cm ဖြစ်လျှင် ထြာပီဇီယမ်၏ ဧရိယာကိုရှာပါ။

$a = 12.5$ cm , $b = 9$ cm, $h = 6$ cm ဟုထားပါ။

$$A = \frac{1}{2}(a+b)\,h$$

$$= \frac{1}{2}(12.5+9)\,6$$

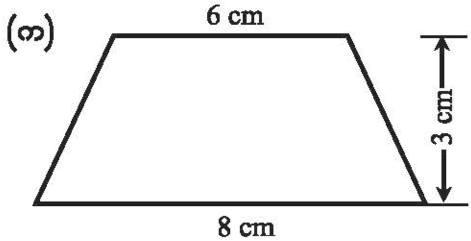
$$= \frac{1}{2}(21.5)\,6$$

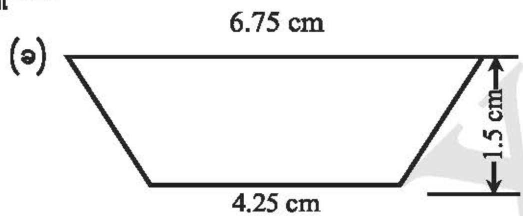
$$= 64.5\ \text{cm}^2$$

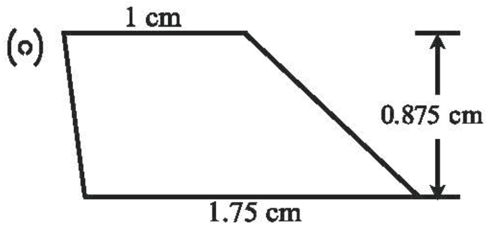
$\therefore$ ထြာပီဇီယမ်၏ ဧရိယာ $= 64.5\ \text{cm}^2$

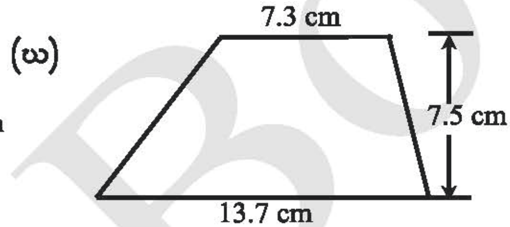
လေ့ကျင့်ခန်း ၇.၂

၁။ ပေးထားသော ထြာပီဇီယမ်တို့၏ ဧရိယာကိုရှာပါ။



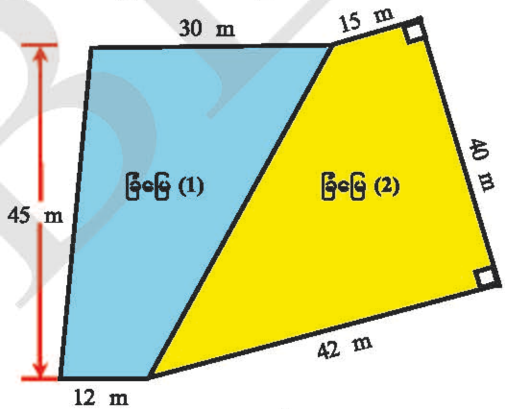






၂။ ထြာပီဇီယမ်တစ်ခု၏ ပြိုင်သောအနားတစ်စုံသည် 8 cm နှင့် 6 cm ရှိ၍ ထိုပြိုင်သောအနားတစ်စုံကြားအကွာအဝေးသည် 7 cm ဖြစ်လျှင် ထြာပီဇီယမ်၏ ဧရိယာကို ရှာပါ။

၃။ ပေးထားသောပုံသည် ထြာပီဇီယမ်ပုံ ခြံမြေနှစ်ခုဖြစ်သည်။ ခြံမြေအမှတ် (1) နှင့် (2) တွင် မည်သည့် ခြံမြေ၏ ဧရိယာက ပို၍ ကြီးသနည်း။

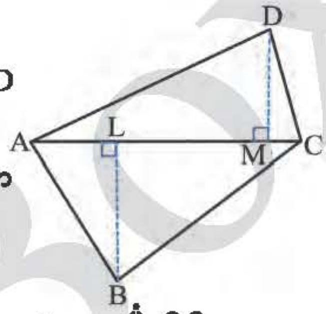


၄။ ထြာပီဇီယမ်တစ်ခု၏ ဧရိယာသည် 34.5 cm^2 ဖြစ်၏။ ပြိုင်သောအနားတစ်စုံကြား အကွာအဝေးသည် 3 cm ဖြစ်၍ ထိုပြိုင်သောအနားတစ်စုံမှ အနားတစ်ဖက်သည် 15 cm ဖြစ်လျှင် ကျန်အနားကို ရှာပါ။

၇.၃ စတုဂံတစ်ခု၏ ဧရိယာရှာခြင်း

စတုရန်းနှင့် ထောင့်မှန်စတုဂံတို့၏ဧရိယာရှာသော ပုံသေနည်းများကို သင်ကြားခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ယခု စတုဂံတစ်ခု၏ ဧရိယာရှာခြင်းကို ဆက်လက်လေ့လာမည်။

ပုံတွင် ABCD သည် စတုဂံတစ်ခုဖြစ်ပြီး AC သည် ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းတစ်ကြောင်းဖြစ်သည်။ ထိုအခါ ΔABC နှင့် ΔADC တို့ပါဝင်သော အပိုင်းနှစ်ပိုင်း ရရှိမည်။ ထို့ကြောင့် စတုဂံ၏ဧရိယာသည် တြိဂံနှစ်ခု၏ဧရိယာများပေါင်းခြင်းနှင့် တူညီသည်။



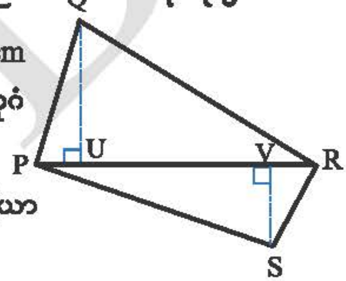
ΔABC နှင့် ΔADC တို့၏ဧရိယာများကို ရှာနိုင်ရန်အတွက် B နှင့် D တို့မှ AC ပေါ်သို့ ထောင့်မတ်မျဉ်း BL နှင့် DM တို့ကို ဆွဲပါ။

စတုဂံ ABCD ၏ဧရိယာ = ΔABC ၏ဧရိယာ + ΔACD ၏ဧရိယာ

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BL + \frac{1}{2} \times AC \times DM$$

$$= \frac{1}{2} \times AC\,(BL + DM)$$ ဖြစ်သည်။

ပုံ ၇.၅



ပုံစံတွက် ၁။ ပေးထားသောပုံတွင် PR = 120 cm, QU = 60 cm နှင့် SV = 30 cm အသီးသီးဖြစ်ကြလျှင် စတုဂံ PQRS ၏ ဧရိယာကိုရှာပါ။

စတုဂံ PQRS ၏ဧရိယာ = ΔPQR ၏ဧရိယာ + ΔPSR ၏ဧရိယာ

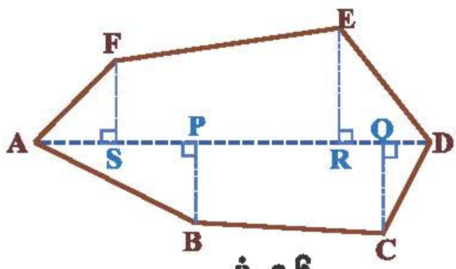
$$= \frac{1}{2}\,PR \times QU + \frac{1}{2}\,PR \times SV$$

$$= \frac{1}{2}\,PR\,(QU + SV)$$

$$= \frac{1}{2} \times 120\,(60 + 30) = 5400\ \text{cm}^2$$

$\therefore$ စတုဂံ PQRS ၏ ဧရိယာ = $5400\ \text{cm}^2$

၇.၄ ပုံသဏ္ဍာန်မမှန်သောပုံများတည်ဆောက်၍ဧရိယာရှာခြင်း



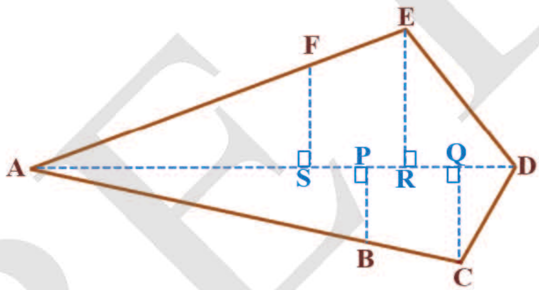
ပုံ ၇.၆

အကယ်၍ပုံများသည် ပုံမှန်မဟုတ်သောပုံများဖြစ်ကြလျှင် ယင်းတို့ကို ထောင့်မှန်စတုဂံများ အဖြစ် ပိုင်းဖြတ်ရန် မဖြစ်နိုင်ချေ။

ပုံတွင် ABCDEF သည်ဗဟုဂံတစ်ခုဖြစ်သည်။ ထောင့်စွန်း A နှင့် D တို့ကိုဆက်သွယ်ပါ။ ထို့နောက် AD ပေါ်သို့ ထောင့်မတ်မျဉ်း BP, CQ, ER နှင့် FS တို့ကို ဆွဲပါ။ ထိုအခါ ဗဟုဂံကို ထောင့်မှန်တြိဂံလေးခု ΔASF, ΔBPA, ΔCQD, ΔDRE နှင့် တြာပီဇီယမ်နှစ်ခု BCQP, EFSR အဖြစ် ပိုင်းဖြတ်ပြီး ဖြစ်သည်။

အကယ်၍ ထောင့်မတ်မျဉ်း အလျားများ BP, CQ, ER, FS တို့နှင့် A မှ P, Q, R, S, D တို့၏ အကွာအဝေးများကို သိရှိလျှင် အထက်ဖော်ပြပါတြိဂံလေးခုနှင့် တြာပီဇီယမ်နှစ်ခုတို့ဧရိယာများကို လွယ်ကူစွာ တွက်ချက်နိုင်ပေသည်။ ၎င်းတို့အားလုံး၏ဧရိယာများပေါင်းလဒ်သည် ဗဟုဂံ ABCDEF ၏ဧရိယာဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၁။ ပေးထားသောပုံတွင် BP = 80 m, CQ = 100 m, ER = 150 m, FS = 130 m, AS = 200 m, AP = 230 m, AR = 250 m, AQ = 280 m နှင့် AD = 310 m အသီးသီးဖြစ်ကြလျှင် ဗဟုဂံ ABCDEF ၏ ဧရိယာကို ရှာပါ။

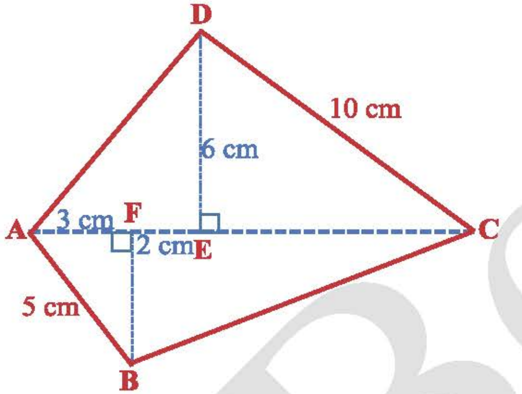


$$\begin{aligned}
\text{ABCDEF ၏ဧရိယာ} &= \angle\text{မှန် } \Delta APB + \angle\text{မှန် } \Delta CQD + \angle\text{မှန် } \Delta DRE + \angle\text{မှန် } \Delta ASF \\
&\quad + \text{တြာပီဇီယမ် BCQP ၏ဧရိယာ} + \text{တြာပီဇီယမ် EFSR ၏ဧရိယာ} \\
&= \frac{1}{2}\times AP\times BP + \frac{1}{2}\times QD\times CQ + \frac{1}{2}\times RD\times ER + \frac{1}{2}\times AS\times FS \\
&\quad + \frac{1}{2}(BP + CQ)\,PQ + \frac{1}{2}(FS + ER)\,SR \\
&= \frac{1}{2}\times 230\times 80 + \frac{1}{2}\,(310-280)\,100 + \frac{1}{2}\,(310-250)150 \\
&\quad + \frac{1}{2}\times 200\times 130 + \frac{1}{2}(80+100)\,(280-230) \\
&\quad + \frac{1}{2}(130+150)\,\,(250-200) \\
&= 9200 + 1500 + 4500 + 13000 + 4500 + 7000 = 39700\ m^2
\end{aligned}$$

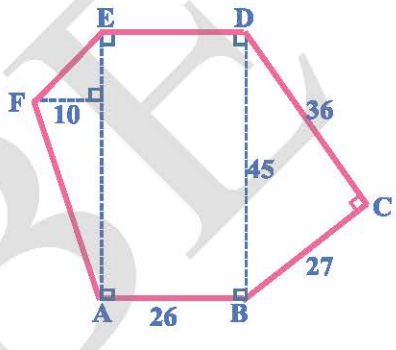
ထို့ကြောင့် ဗဟုဂံ ABCDEF ၏ ဧရိယာသည် $39700\ m^2$ ဖြစ်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၇.၃

၁။ ပေးထားသောစတုဂံ ABCD ၏ ဧရိယာများကို ရှာပါ။



၂။ ပုံတွင် ABCDEF သည် လယ်မြေတစ်ကွက်၏ ပုံဖြစ်၍ ယင်း၏ အလျားများကို မီတာများဖြင့် ဖော်ပြထားသည်။ ABDE သည် ထောင့်မှန်စတုဂံ၊ ΔBCD သည် ထောင့်မှန်တြိဂံ ဖြစ်၍ $FG \perp AG$ ဖြစ်သည်။ ထိုလယ်မြေ၏ ဧရိယာကို ရှာပါ။



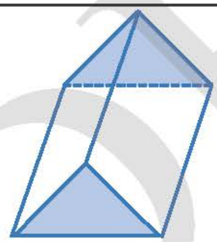
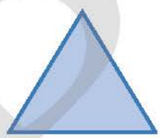
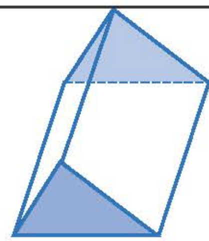
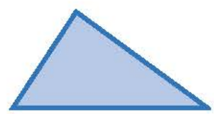
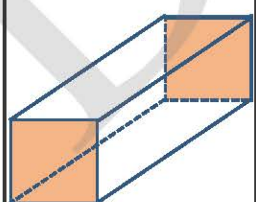
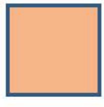
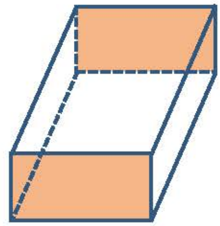
အခန်း ၈ ပမာဏသင်္ချာ (ထုထည်)

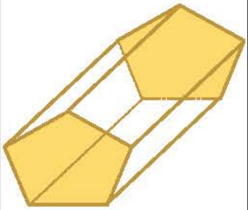
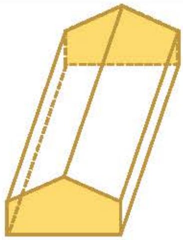
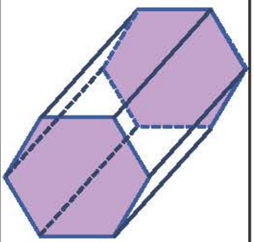
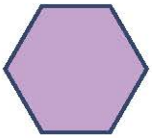
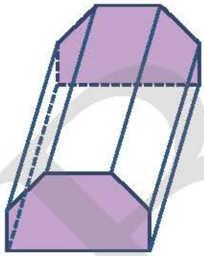
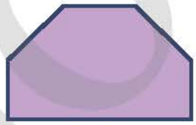
ဆဋ္ဌမတန်းတွင် ထောင့်မှန်စတုဂံတုံးနှင့် ကုဗတုံးတို့၏ ထုထည်ရှာခြင်းများကို လေ့လာခဲ့ပြီး ဖြစ်သည်။

ဤသင်ခန်းစာတွင် ဒုပုံပစ္စည်းအချို့မှ ဒုရှည်နှင့်ပတ်သက်သည့် အကြောင်းအရာများနှင့် ဒုရှည်၏ထုထည်ရှာနည်းများအကြောင်းကိုလေ့လာကြမည်။ ဤသင်ခန်းစာလေ့လာပြီးပါက ပတ်ဝန်းကျင်ရှိ ဒုရှည်ပုံသဏ္ဍာန် ရုပ်ဝတ္ထုပစ္စည်းများ၏ အောက်ခြေဧရိယာနှင့်အမြင့်တို့ကို ရယူခြင်းဖြင့် ယင်းဒုရှည်၏ ထုထည်ကို ရှာနိုင်မည်ဖြစ်သည်။

၈.၁ ဒုရှည် (Prism)

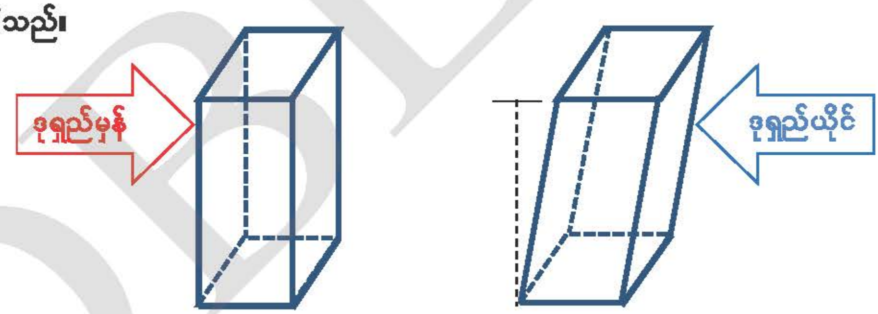
ဒုရှည်ဆိုသည်မှာ ပြိုင်နေသော ထိပ်မျက်နှာပြင်နှစ်ခုတို့ အတိအကျတူညီကြပြီး ညီညာပြန့်ပြူးသော အနားပြိုင်စတုဂံပုံ ဘေးမျက်နှာပြင်များဖြင့် ဖွဲ့စည်းထားသော ဒုပုံတစ်ခုဖြစ်သည်။ ထိုဒုရှည်များကို ထိပ်မျက်နှာပြင်ပုံသဏ္ဍာန်ပေါ် မူတည်၍ **ပုံမှန်ဒုရှည်** (regular prism) နှင့် **ပုံမမှန်ဒုရှည်** (irregular prism) ဟုနှစ်မျိုးခွဲခြားနိုင်သည်။ ထိပ်မျက်နှာပြင်သည် တူညီသောအနားစောင်းများနှင့် တူညီသောထောင့်များပါရှိသည့် ပြင်ညီပုံများ (ဥပမာ - သုံးနားညီတြိဂံ၊ စတုရန်း၊ ဥသုံ့ညီပဥ္စဂံ၊ ဥသုံ့ညီဆဋ္ဌဂံ စသဖြင့်) ဖြစ်ပါက ပုံမှန်ဒုရှည် ဟုခေါ် ဆိုပြီး ထိပ်မျက်နှာပြင်သည် တူညီသောအနားစောင်းများနှင့် တူညီသောထောင့်များရှိသည့်ပြင်ညီပုံများ မဟုတ်ပါက ပုံမမှန်ဒုရှည် ဟုခေါ် သည်။

ပုံမှန်ဒုရှည်	ထိပ်မျက်နှာပြင် (ပြင်ညီပုံ)	ပုံမမှန်ဒုရှည်	ထိပ်မျက်နှာပြင် (ပြင်ညီပုံ)
	 သုံးနားညီတြိဂံ		 အနားမညီတြိဂံ
	 စတုရန်း		 ထောင့်မှန်စတုဂံ

ပုံမှန်ဒုရှည်	ထိပ်မျက်နှာပြင် (ပြင်ညီပုံ)	ပုံမမှန်ဒုရှည်	ထိပ်မျက်နှာပြင် (ပြင်ညီပုံ)
	 ဥသုံညီပဥ္စဂံ		 အနားမညီပဥ္စဂံ
	 ဥသုံညီဆဋ္ဌဂံ		 အနားမညီဆဋ္ဌဂံ

၈.၁.၁ ဒုရှည်မှန် (Right Prism) **နှင့် ဒုရှည်ယိုင်** (Oblique Prism)

ဒုရှည်တွင်ပါဝင်သော ဘေးပတ်လည်မျက်နှာပြင်များသည် ထိပ်မျက်နှာပြင်များနှင့် ထောင့်မတ်ကျတည်ရှိနေပါက ယင်းဒုရှည်ကို **ဒုရှည်မှန်** ဟုခေါ်ပြီး ဘေးမျက်နှာပြင်များသည် ထိပ်မျက်နှာပြင်များနှင့် ထောင့်မတ်ကျတည်ရှိမနေဘဲ စောင်းလျက် တည်ရှိနေပါက ယင်းဒုရှည်ကို **ဒုရှည်ယိုင်** ဟုခေါ်သည်။



ပုံ ၈.၁

၈.၂ ဒုရှည်၏ထုထည်ရှာခြင်း

ဒုရှည်တစ်ခု (ဒုရှည်မှန် သို့မဟုတ် ဒုရှည်ယိုင်) ၏ထုထည်ကို ယင်းဒုရှည်၏ ထိပ်မျက်နှာပြင်ဧရိယာ (အောက်ခြေဧရိယာ) နှင့် ထိပ်မျက်နှာပြင်နှစ်ခုကြားအကွာအဝေး (အမြင့်) တို့မြှောက်ခြင်းဖြင့် ရှာနိုင်သည်။ ထို့ကြောင့် ဒုရှည်အမျိုးအစား နှစ်မျိုးဖြစ်သည့် ဒုရှည်မှန်နှင့် ဒုရှည်ယိုင် တို့၏ထုထည်ကို အောက်ပါကဲ့သို့ ဖော်ပြနိုင်သည်။

ထုထည် = အောက်ခြေဧရိယာ × အမြင့်

$$V = Ah$$

ပုံစံတွက် ၁။ အောက်ခြေဧရိယာ 40 စတုရန်းစင်တီမီတာရှိ၍ 1.5 မီတာမြင့်သော ဒုရှည်တစ်ခု၏ ထုထည်ကိုရှာပါ။

အောက်ခြေဧရိယာ A = 40 စတုရန်းစင်တီမီတာ

အမြင့် h = 1.5 မီတာ

= 1.5 × 100 စင်တီမီတာ = 150 စင်တီမီတာ

ဒုရှည်၏ထုထည် = အောက်ခြေဧရိယာ × အမြင့်

$V = Ah$

$= 40 \times 150 = 6000$ ကုဗစင်တီမီတာ

∴ ဒုရှည်၏ထုထည် = 6000 ကုဗစင်တီမီတာ

ပုံစံတွက် ၂။ စတုရန်းဒုရှည်မှန်တစ်ခု၏ ထုထည်မှာ $15552\ cm^3$ ဖြစ်၍ အမြင့်မှာ 48 cm ဖြစ်သော် အောက်ခြေစတုရန်း၏ အနားတစ်နားအလျားကိုရှာပါ။

စတုရန်းဒုရှည်မှန်၏ထုထည် $V = 15552\ cm^3$

အမြင့် $h = 48$ cm

စတုရန်းဒုရှည်မှန်၏ထုထည် = အောက်ခြေစတုရန်း၏ဧရိယာ × အမြင့်

$$V = Ah$$

$$A = \frac{V}{h}$$

$$A = \frac{15552}{48}$$

$$A = 324\ cm^2$$

စတုရန်း၏ဧရိယာ = အနား × အနား

$$A = \ell^2$$

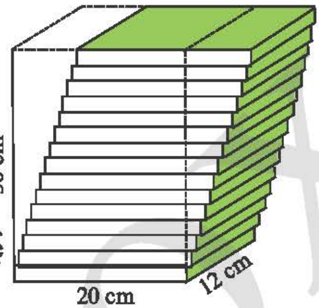
$$\ell^2 = 324$$

$$\ell = \sqrt{324}$$

$$\ell = 18\ cm$$

∴ အောက်ခြေစတုရန်း၏ အနားတစ်နားအလျား = 18 cm

ပုံစံတွက် ၃။ စာအုပ်တစ်အုပ်လျှင် အလျား 20 cm အနံ 12 cm ရှိသောစာအုပ်များကို ပုံတွင်ပြထားသည့်အတိုင်း စုပုံထားရာ စာအုပ်ပုံ၏အမြင့်သည် 30 cm ရှိသော် ထိုစာအုပ်ပုံ၏ ထုထည်ကိုရှာပါ။



စာအုပ်ပုံ၏အမြင့် $h = 30$ cm

စာအုပ်ပုံ၏အောက်ခြေဧရိယာ= အလျား × အနံ

$A = 20 \times 12$

$= 240 \text{ cm}^2$

စာအုပ်ပုံ၏ထုထည် = အောက်ခြေဧရိယာ × အမြင့်

$V = Ah$

$= 240 \times 30$

$= 7200 \text{ cm}^3$

$\therefore$ စာအုပ်ပုံ၏ထုထည် $= 7200 \text{ cm}^3$

ပုံစံတွက် ၄။ ဒုရှည်မှန်တစ်ခု၏ထိပ်မျက်နှာပြင်များသည် တြာပီဇီယမ်ပုံများ ဖြစ်သည်။ တြာပီဇီယမ်တစ်ခု၏ ပြိုင်နေသော အနားအလျားများသည် 7 m နှင့် 11 m ဖြစ်ပြီး ထိုပြိုင်နေသော အနားနှစ်နားကြား အကွာအဝေးမှာ 4 m ဖြစ်သည်။ အဆိုပါဒုရှည်မှန်သည် 20 m ရှည်သော် ယင်း၏ထုထည်ကိုရှာပါ။

တြာပီဇီယမ်၏ဧရိယာ $= \frac{1}{2}$ × ပြိုင်နေသောအနားများပေါင်းလဒ်

× ပြိုင်နေသောအနားနှစ်နားကြားအကွာအဝေး

$= \frac{1}{2}(7 + 11)\, 4$

$= \frac{1}{2} \times 18 \times 4$

$= 36 \text{ m}^2$

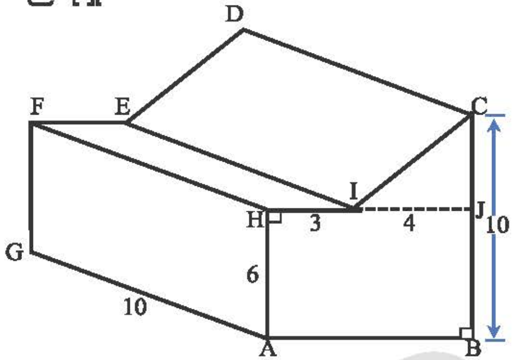
ဒုရှည်မှန်၏ထုထည် = အောက်ခြေဧရိယာ × အမြင့်

= တြာပီဇီယမ်၏ဧရိယာ × ဒုရှည်မှန်၏အရှည်

$= 36 \times 20$

$= 720 \text{ m}^3$

ပုံစံတွက် ၅။ ပေးထားသောဒုရှည်မှန်ပုံတွင် ၎င်း၏အနားအလျားများကို cm ဖြင့်ဖော်ပြထားသည်။ ထိုပုံ၏ထုထည်ကိုရှာပါ။



$$\begin{aligned}
\text{ABCIH ၏ ဧရိယာ} &= \text{ထောင့်မှန်စတုဂံ ABJH} + \text{ထောင့်မှန်တြိဂံ IJC ၏ဧရိယာ}\\
&= \text{အလျား} \times \text{အနံ} + \frac{1}{2} \times \text{အခြေ} \times \text{အမြင့်}\\
&= 7 \times 6 + \frac{1}{2} \times 4 \times 4\\
&= 42 + 8\\
&= 50\ \text{cm}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ဒုရှည်မှန်၏ ထုထည်} &= \text{အောက်ခြေဧရိယာ} \times \text{အမြင့်}\\
&= \text{ABCIH ၏ ဧရိယာ} \times \text{AG}\\
&= 50 \times 10\\
&= 500\ \text{cm}^3
\end{aligned}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၁

၁။ အောက်ဖော်ပြပါဇယားမှ ဒုရှည်မှန်အသီးသီးအတွက် လိုအပ်သော ထုထည်နှင့် အမြင့်တို့ကို ရှာပါ။

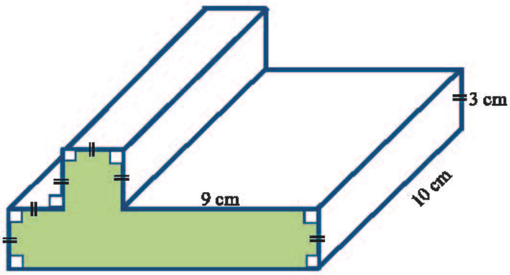
	(က)	(ခ)	(ဂ)	(ဃ)
အောက်ခြေဧရိယာ	$1.2\ \text{cm}^2$	$2.5\ \text{cm}^2$	$9\ \text{m}^2$	$0.05\ \text{m}^2$
အမြင့်	3.5 m		3 cm	
ထုထည်		$27.5\ \text{cm}^3$		$1350\ \text{cm}^3$

၂။ အောက်ပါထောင့်မှန်စတုဂံဒုရှည်မှန်အသီးသီး၏ထုထည်ကို ကုဗစင်တီမီတာ (cm^3) ဖြင့်ပြပါ။

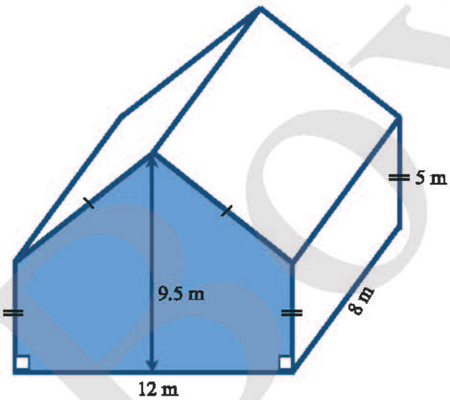
(က) အလျား = 4 cm	အနံ = 6 cm	အမြင့် = 10 cm
(ခ) အလျား = 10.8 mm	အနံ = 3.5 mm	အမြင့် = 4.0 mm
(ဂ) အလျား = 5 m	အနံ = 3 m	အမြင့် = 4 m

၃။ အောက်ဖော်ပြပါပုံများ၏ ထုထည်ကိုရှာပါ။

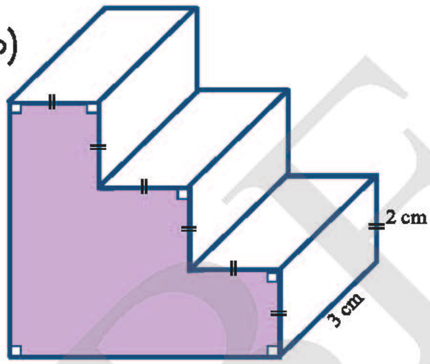
(က)



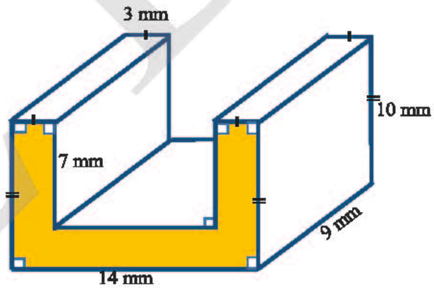
(ခ)



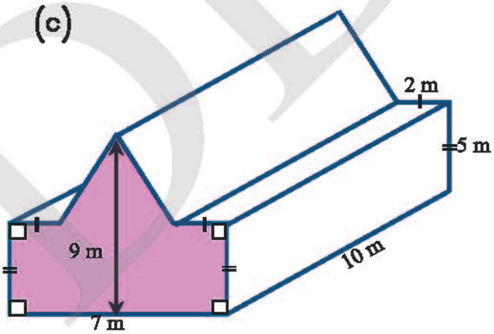
(ဂ)



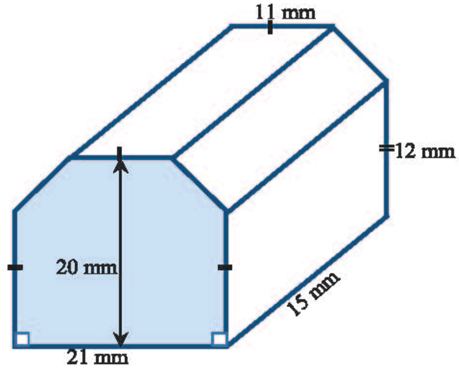
(ဃ)



(င)



(စ)



၄။ တြိဂံဒုရှည်မှန်တစ်ခု၏အခြေ ABC တွင် B သည် ထောင့်မှန်ဖြစ်၍ AB = 12 cm နှင့် BC = 5 cm ဖြစ်သည်။ တြိဂံဒုရှည်မှန်သည် 15 cm မြင့်သော် ယင်းဒုရှည်မှန်၏ထုထည်ကို ရှာပါ။

၅။ ကျင်းတစ်ခု၏ ဒေါင်လိုက်ဖြတ်ပိုင်းပုံသည် တြာပီဇီယမ်ပုံဖြစ်၏။ ကျင်းအောက်ဘက်တွင် 5 m ကျယ်၍ အပေါ်ဘက်တွင် 7 m ကျယ်ပြီး 6 m နက်၏။ ကျင်းသည် 10 m ရှည်သော် တူးထုတ်လိုက်သော မြေကြီး၏ထုထည်ကိုရှာပါ။

၆။ အောက်ပါဒုရှည်မှန်များ၏ ပုံကြမ်းရေးဆွဲပြီး ထုထည်ကိုရှာပါ။

	(က)	(ခ)	(ဂ)	(ဃ)
ထိပ်မျက်နှာပြင်	6 cm အနားများရှိသော စတုရန်းပုံ	5 cm နှင့် 2.5 cm အနားများရှိသော ထောင့်မှန်စတုဂံပုံ	အခြေ 8 cm နှင့် အမြင့် 6 cm ရှိသော တြိဂံပုံ	ပြိုင်နေသော အနားများ 18 cm နှင့် 12 cm ရှိပြီး ထိုအနားနှစ်ခုကြား အကွာအဝေး 10 cm ရှိသော တြာပီဇီယမ်ပုံ
အမြင့်	4 cm	8 cm	12 cm	24 cm